جامعة سوهاج

كلية التربية

المجلة تربوية

فاعلية استراتيجية مقترحة قائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية

إعداد

د/ ابتسام عز الدين محمد عبد الفتاح
أستاذ مساعد المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية التربية– جامعة الزقازيق
dr.ebtsamezz@yahoo.com

د/ رشا نبيل سعد إبراهيم صالحه
مدرس المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية التربية– جامعة الزقازيق
dr.rashanabil593@yahoo.com

تاريخ استلام البحث : ٢٨ نوفمبر ٢٠٢٣م – تاريخ قبول النشر: ١٢ ديسمبر ٢٠٢٣م

DOI: 10.12816/EDUSOHAG.2024.

الملخص:

هدف البحث إلى قياس فاعلية استراتيجية مقترحة قائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدي تلاميذ المرحلة الإبتدائية.

وقد تم استخدام المنهج التجريبي، ذو التصميم التجريبي القائم على المجموعتين؛ حيث تم اختيار عينة البحث من تلاميذ الصف السادس الإبتدائي بمدرسة (الشهيد أحمد عبدالله الزقاقي) بإدارة ميت غمر التعليمية/ محافظة الدقهلية؛ وتم تقسيمها إلى: مجموعة تجريبية (ن = ٣٣)، ومجموعة ضابطة (ن = ٣٥).

وتضمن البحث اختبار في مستويات عمق المعرفة الرياضية، واختبار في الفهم العميق في الرياضيات، تم تطبيقهما قبليًا وبعديًا على مجموعتي البحث.

وبعد المعالجة التجريبية واختبار صحة الفروض أظهرت النتائج: وجود فرق دال احصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية، ودرجات تلاميذ المجموعة الضابطة فى التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية، ووجود فرق دال احصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية ودرجات تلاميذ المجموعة الضابطة فى التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية؛ أي أن الاستراتيجية المقترحة أدت إلى تنمية مستويات عمق المعرفة وأبعاد الفهم العميق في الرياضيات لدى التلاميذ، كما كشفت النتائج أيضًا عن وجود ارتباط موجب قوي دال احصائيًا عند مستوى (٠.٠١) بين مستويات عمق المعرفة، والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ المجموعة التجريبية، ولم تكشف النتائج عن وجود فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيقين (البعدي والتتبعي) لاختباري مستويات عمق المعرفة، والفهم العميق في الرياضيات؛ مما يدل على بقاء واستمرار فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات.

الكلمات المفتاحية: نموذج التلمذة المعرفية – نموذج ويتلي – مستويات عمق المعرفة الرياضية – الفهم العميق في الرياضيات

The effectiveness of a proposed strategy based on the cognitive apprenticeship and Wheatley models to develop a depth of mathematical knowledge and a deep understanding in mathematics of primary school students.

Abstract:

The research aimed to measure the effectiveness of a proposed strategy based on the cognitive apprenticeship and Wheatley models in developing levels of depth of mathematical knowledge and deep understanding in mathematics among primary school students.

The experimental method was used; The research sample was selected from sixth grade primary school students at (Mit Ghamr Joint Preparatory School), Mit Ghamr Educational Administration/Dakahlia Governorate. It was divided into: an experimental group (n = 33) and a control group (n = 35).

The research prepared a test on levels of depth of mathematical knowledge, and a test on deep understanding skills in mathematics, and they were applied pre- and post-test to the two research groups.

After the experimental treatment and testing the validity of the hypotheses, the results showed: There is a statistically significant difference between the average scores of the students in the experimental group and the scores of the students in the control group in the post-application test for the levels of depth of mathematical knowledge in favor of the students in the experimental group, and the presence of a statistically significant difference between the average scores of the students in the experimental group and the scores of the students in the control group. In the post-application of the deep understanding test in mathematics for the benefit of the experimental group students; That is, the proposed strategy led to the development of levels of depth of knowledge and deep understanding skills in mathematics among the students of the research sample. The results also revealed the presence of a strong, statistically significant positive correlation at the level (0.01) between the levels of depth of knowledge and deep understanding among the students of the experimental group. The results did not reveal There was a statistically significant difference between the average scores of the experimental group's students in the two applications (post and follow-up) of the tests for levels of depth of knowledge and deep understanding in mathematics. Which indicates the continued effectiveness of the proposed strategy in developing levels of depth of mathematical knowledge and deep understanding in mathematics.

Keywords: cognitive apprenticeship model - Wheatley model - levels of depth of mathematical knowledge - deep understanding in mathematics

مقدمة :

مادة الرياضيات هى مادة الفكر وإعمال العقل، وهى تلعب دورًا رئيسيًا وهامًا في زيادة قدرة المتعلمين على مواجهة تحديات العصر، وعلى مواكبة التقدم العلمي والتكنولوجي المتسارع؛ لذا يجب أن يسعى القائمين على تدريس مادة الرياضيات من الانتقال من مرحلة اكتساب المعرفة الرياضية إلى مرحلة تطبيق المعرفة وتوظيفها باستخدام طرق التفكير المختلفة في المواقف الحياتية المتنوعة؛ وذلك من خلال الإهتمام بتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين.

حيث أن الاهتمام بتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين أصبح من أبرز الإتجاهات الحديثة في مجال تعليم الرياضيات وتعلمها؛ فهى تمكن المتعلم من تحقيق مهارات القرن الحادي والعشرين؛ تلك المهارات التي يحتاجها المتعلم ليتمكن من النجاح في مجتمع رقمي سريع التغير والتطور(Khudhair & Jasim, 2021,1338).

كما أشارت دراسة حسن (٢٠١٨، ١٣٠-١٣١) إلى أن تنمية عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين بما تتطلبه من مهارات معقدة ومركبة للتفكير تعد من الأهداف المهمة لتعليم وتعلم الرياضيات؛ فهى تمكن المتعلم من الفحص الناقد للحقائق والأفكار الرياضية وعمل ترابطات بين هذه الأفكار وبعضها البعض، ووضعها في البنية المعرفية لديه، والتركيز على البراهين والحجج الرياضية المطلوبة للمشكلة الرياضية، بالإضافة إلى قيامه بأنشطة ما وراء معرفية.

وأكدت دراسة عبد الرحيم (٢٠٢٠، ١٢٣) على أنه يجب على القائمين على تدريس مناهج الرياضيات تحقيق أهداف تربوية تصل إلى تنمية مهارات التفكير المختلفة والعمليات المعرفية العليا والتي منها عمق المعرفة الرياضياتية.

حيث أن امتلاك المعرفة أمر مهم، ولكن امتلاك القدرة على بناء المعرفة والتعمق فيها والاستخدام الحكيم لها أهم بكثير (Imamah, 2014)؛ فالمتعلم الذي يتسم بعمق المعرفة يكون لديه القدرة على تحليل وتركيب وتقويم المعارف الرياضية الجديدة وربطها بما لديه من معارف سابقة ووضعها في إطار مفاهيمي، كما يكون لديه القدرة أيضًا على حل المشكلات وتفسير المعلومات والمقارنة وطرح الأسئلة وتطبيق المعرفة في سياقات جديدة غير مألوفة (Taylor, 2021, 9).

ومستويات عمق المعرفة الرياضية تعرف بأنها: تنظيم محكم منطقي للمعارف والمهارات التي يجب أن يتمكن منها المتعلم في مادة الرياضيات وفقًا لدرجة قوتها وعمقها في أربع مستويات، أقلها عمقًا مستوى التذكر، ثم التطبيق، ثم التفكير الاستراتيجي، ثم أكثرها عمقًا وهو مستوى التفكير الممتد (عبد الملاك، ٢٠٢٠، ٤٥٧).

وتعد المرحلة الإبتدائية من أهم المراحل في حياة المتعلم التي يجب أن يكتسب فيها المعرفة الرياضية بشكل جيد، من كيفية التعامل مع الأعداد والأرقام والقياس والهندسة وجمع البيانات وتفسيرها وحل المشكلات والتفكير النقدي، حيث أن كل هذه المعرفة الرياضية سوف تستخدم كأساس للتعلم في المراحل الدراسية التالية، كما أن إعداد التلاميذ ذوي القدرة على توظيف طرق التفكير المتنوعة في حل المشكلات الرياضية، واتخاذ القرارت المناسبة في المواقف الحياتية المتنوعة لا يمكن أن يتم إلا بالتعمق في معالجة المعرفة الرياضية (إبراهيم، ومرسال، ٢٠٢٢، ٢٠١).

لذا فتعليم وتعلم الرياضيات في المرحلة الإبتدائية يجب ان يهتم بعمق المعرفة الرياضية لدى التلاميذ بإعتبارها اللبنة الأساسية التي من خلالها سوف يتم تعلم فروع الرياضيات في المراحل التعليمية القادمة (محمد وآخرون،٢٠٢١، ١٩٩).

وترتبط مستويات عمق المعرفة بشكل وثيق بعمق فهم المحتوى؛ حيث يكتسب المتعلم المعرفة بشكل أعمق عندما يكون لديه فهم أعمق للمحتوى؛ لذا يجب الاهتمام أيضًا بتعزيز وتنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى المتعلمين؛ لتشجيعهم على الفهم العميق لأساسيات الرياضيات، وتقوية البنية الرياضية للعمليات الأساسية، واتقانها، والقدره على التفكير بأنماطه المختلفه.

فلم يعد الهدف من تعلم الرياضيات هو مجرد إجراء عمليات حسابية أو حل مسائل رياضية مجردة دون إجراء روابط بينها وبين الواقع، بل أصبح الهدف من تعلم الرياضيات هو صقل شخصية المتعلم واكسابه الفهم العميق للمفاهيم والتعميمات الرياضية واستنتاج العلاقات بينهما والتفكير واستبصار خطوات حل المشكلات الرياضية وتحمل مسئولية تعلمه (أحمد، ، ٢٠٢٠، ٣٨٦).

حيث أن مادة الرياضيات تقوم على الأفكار المترابطة، والمقارنات، وفهم التناقضات بين المفاهيم والعلاقات والبدائل والتي لا تأتي إلا من خلال فهم ومعالجة المعرفة، وربطها

بالمعرفة السابقة الموجودة في البنية المعرفية للمتعلم، فيما يسمى بالفهم العميق (زنقور، ٢٠١٨، ٨٤).

فالفهم العميق للرياضيات يعني أن يبني المتعلم علاقة بين محتوى التعلم والمعرفة المكونة في بنائه المعرفي من خلال استبصارات وقدرات تنعكس في أداءاته المختلفة عن طريق استخدام المعرفة السابقة أو المخططات العقلية في طرح التساؤلات والتفسيرات وإنتاج الأفكار (الحنان، ٢٠٢٠، ٢٣٦).

ويحدث الفهم العميق للرياضيات عندما ينغمس المتعلم في ثقافة التفكير؛ ليصبح تطوير الفهم هو الهدف الأساسي لتعلم الرياضيات (سيد، ٢٠٢٢، ٢٠٤)

مما تقدم يتضح ضرورة الإهتمام بالتعمق في معالجة المعارف الرياضية المقدمة للمتعلمين عن طريق ربطها بالمعارف والمعلومات السابقة الموجودة في البنية المعرفية لديهم، وربطها بالحياة الواقعية، كما يجب أن يفهم المتعلمين طبيعة المحتوى الرياضي المقدم لهم فهمًا عميقًا مما يجعل التعلم ذو معنى.

وحيث أن طبيعة مادة الرياضيات تتطلب أن يكون المتعلمين منشغلين ومندمجين بالكامل في عملية التعلم؛ لذا فتعلم الرياضيات يحتاج إلى طرق وأساليب مختلفة عن الممارسات التقليدية المعتمده على تقديم المعرفة الرياضية للمتعلمين بشكل جاهز؛ ليتم استيعابها والرجوع إليها وتفريغها عند الحاجه (حماده، ٢٠١٨، ٧).

ولكي يتم ذلك يجب اتباع نماذج واستراتيجيات تدريسية فعالة تجعل المتعلمين قادرين على استخدام المعرفة وتطبيقها عمليًا في مواقف مختلفة، وتتيح لهم الفرصه للحوار والمناقشة والمشاركة في المهام التعليمية المختلفة داخل الفصل؛ فالمتعلم لكي يبنى معرفته الرياضية يجب أن يكون معتمدًا على ذاته في التعلم، ومسئولاً عن تعلمه وما يرتبط به من عمليات وأنشطة تعليمية، وهذا يتطلب التحول من البيئة الصفية التقليدية إلى البيئة الصفية البنائية، التي تقبل استقلالية وذاتية المتعلم، والتي تجعل المتعلم يبني معرفته بنفسه، ويقوم فيها باكتساب العمليات المعرفية ومعالجتها واستخدامها في المواقف الحياتية؛ أى يجب تفعيل نماذج واستراتيجيات التعلم النشط الواقعة تحت تطبيقات النظرية البنائية في التعلم.

حيث تؤكد دراسة الحربي (٢٠١٧، ١٢) بأن الاخذ بتطبيقات النظرية البنائية في تدريس الرياضيات يحقق بيئة تعليمية هادفة مناسبة لتعلم مادة الرياضيات بطريقة قائمة على الفهم؛ من خلال التعلم النشط والتفاوض في حل المشكلات.

ويعد كل من نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي من أهم التطبيقات التي انبثقت من النظرية البنائية التي تدعو إلى بناء المتعلم للمعرفة بنفسه من خلال تفاعله مع الموقف التعليمي، فهى تشجع المشاركة النشطة والتفاعل الفعال بين المتعلمين من خلال المناقشات، والأنشطة المختلفة؛ وبالتالي يصبح المتعلم نشيط يبحث عن المعنى، قادر على اتخاذ القرار، وعلى بناء تمثيلات عقلية ذات معنى من خلال تفكيره ونشاطه الذاتي.

وانطلاقًا من اعتماد نموذج التلمذة المعرفية على النظرية البنائية، فإنه يركز على اتقان التعلم، وعلى تعلم المهارات الضرورية اللازمة لحل المشكلات، وعلى تطبيق المعرفة السابقة التي سبق للمتعلم تعلمها في مواقف جديدة للتعلم (البلوي، والصامدي، ٢٠١٧، ٣٧٢).

فهو نموذج يتناول لب التدريس والتعليم الحقيقي، ويمكن المتعلم من اكتساب وتطوير واستخدام الأدوات المعرفية في مجال نشاط حقيقي، ويحاول وضعه في ممارسات علمية حقيقية من خلال النشاط والتفاعل الإجتماعي؛ لتطوير وتنمية مهاراته وقدراته العقلية (المشهداني، والشمري، ٢٠١٧، ٧٤).

حيث جاء نموذج التلمذة المعرفية لمعالجة مشكلة جمود المعرفة في المدارس، والإسهام في تكامل التعليم الأكاديمي والتعليم الفني؛ ليتمكن المتعلمين من تشكيل إدراكهم المعرفي، وتفعيل عمليات التفكير واستخدامها في سياقات تعليمية واقعية ومتنوعة (العتيبي، والفهد، ٢٠٢٠، ١٨).

كما يساعد في التغلب على مشكلات اكتساب المعرفة وجعل المتعلم بعيدًا عن الخمول والكسل في الحصول على المعرفة عن طريق استثارة المهارات العقلية وإيجاد ربط بين ما يتعلمه نظريًا وما يقوم به عمليًا (سعد، ٢٠٢٢، ٤٢٦)

بالإضافة إلى إنه يعلي من شأن التفاعلات الإجتماعية داخل غرفة الصف في مواقف التعليم المختلفة، ويساعد التلاميذ على تطوير استراتيجيات تعلمهم، وتعلم التفكير واستخدام

العمليات العقليا العليا، وتوظيف ما تم تعلمه في المواقف الحياتية (الزهراني، وأبو رحمة، ٢٠١٩، ٤٩٩)

كما أنه يستخدم لتنمية المهارات المعرفية العليا (Matsuo & Tsukube, 2020,1)؛ حيث يمكن استخدام التلمذة المعرفية لتنمية أنواع مختلفة من التفكير المطلوبه لتنمية العمليات المعرفية وما وراء المعرفية، بالإضافة إلى تنمية القدرة على حل المشكلات وإستيعابها والتفكير فيها بشكل نقدي (Rucker, et al, 2021, 836)

وقد عرف كل من Minshew et al. (2021, 2) نموذج التلمذة المعرفية بأنه: نموذج تدريسي يوفر للمعلمين إرشادات حول كيفية شرح معارفهم للمتعلمين من خلال خلق بيئة تعليمية تقوم على النمذجة، والتوجيه، وتوفير السقالات، ودعم وتعزيز مشاركة المتعلمين المجتمعية، وتشجيعهم على أن يصبحوا خبراء.

وقد أشارت الدراسات السابقة إلى أهمية وضرورة استخدام نموذج التلمذة المعرفية في العملية التدريسية لفاعليته في تحسين الممارسات التدريسية، وفي جعل المتعلم نشطًا في بناء وتكوين المعرفة، مثل دراسة Stefaniak (2018) التي أوصت بأهمية استخدام نموذج التلمذة المعرفية في تحسين الممارسات التدريسية لدى أعضاء هيئة التدريس، وفي تدريبهم على كيفية تنفيذ استراتيجيات التدريس المتمحورة حول المتعلم في ممارساتهم التدريسية، وأشارت النتائج إلى فاعلية التلمذة المعرفية في تطوير المهارات التدريسية لأعضاء هيئة التدريس، كما أوصت دراسة Napari (2020, 13) بضرورة دمج نموذج التلمذة المعرفية في أي نظام تعليمي؛ لأنه يزود المتعلمين بالمهارات الازمة للعمل وريادة الأعمال، وتنمية الطموح الوظيفي لهم في المستقبل بعد تخرجهم من المدرسة، حيث أكدت الدراسة على أن نموذج التلمذة المعرفية هو أفضل شكل من أشكال التعليم الذي يقدم التدريب العملي على هذه المهارات، ودراسة كل من Lee & Paz (2021, 473) التي أكدت على أن التلمذة المعرفية من النماذج القوية في التدريس والمناسبة لجميع المراحل التعليمية، ولجميع فئات الطلاب.

وفي تدريس مادة الرياضيات أكدت دراسة الجبر (٢٠١٣، ١٨) على أن نموذج التلمذة المعرفية من أنسب النماذج لتعليم وتعلم الرياضيات؛ لأنه يجعل مهارات التفكير مرئية لدى المتعلمين، ويتيح لهم فرص ممارسة طرق التفكير السليم، كما يساهم في إكساب

المتعلمين مهارات حل المشكلات التي تعتبر من أهم أهداف تعليم وتعم الرياصيات، بالإضافة إلى إشارة دراسة كل من Lo & Tsai (2022) ، ودراسة كل من Pinto & Zvacek (2022) إلى فاعلية نموذج التلمذة المعرفية في تدريس الرياضيات، وفي تزويد معلمي الرياضيات بالمهارات المهنية المطلوبة لتدريس المادة، وفي رضا المتعلمين وتكوين اتجاهات ايجابية نحو دراسة مادة الرياضيات.

وحيث أن تعلم الرياضيات يكون أكثر فاعلية من خلال تقديم مشكلات حقيقية وتدريب المعلمين على حلها (Apriliana et al, 2019, 129).

فإن استخدام نموذج ويتلي في التدريس يجعل التلميذ يتعلم من خلال حل مشكلات مفتوحة النهايات ترتبط بمشاكل العالم الحقيقي؛ فيكتسب من خلاله مهارات التفكير، والقدرة على حل المشكلات، ومهارات التواصل والتعلم مدى الحياة (Ali, 2019, 73).

وقد أكدت دراسة Shobirin et al, (2021, 101) على أن نموذج ويتلي يعد من النماذج البنائية النموذجية الذي يجب أن يستخدمه المعلم في عملية التعليم؛ لتحفيز المتعلمين ولتحقيق نتائج تعليمية عالية الجودة.

فنموذج ويتلي يدرب عقل المتعلم على سرعة وكفاءة إصدار الحلول المتنوعة والمناسبة لطبيعة المشكلات الرياضية؛ ويزود مرونة العقل بما يسمح بإنطلاق الأفكار وتعدد الرؤى (سيفين، ٢٠١٥، ٨٨).

وعرف Apriliana et al (2019, 126) نموذج ويتلى (نموذج التعلم المستند إلى المشكلة) بأنه: نموذج تعليمي يقدم الأفكار الرياضية في صورة مواقف ومشكلات حقيقية؛ ليتيح الفرصة أمام المتعلمين لاكتشاف واكتساب المعرفة وربطها بخبراتهم السابقة.

وقد أشارت نتائج الدراسات السابقة مثل: دراسة Rinaldi & Afriansyah (2019, 11) إلى أنه يمكن الإستفادة من نموذج ويتلي في تدريس الرياضيات في تنمية العديد من المتغيرات الهامة مثل تنمية مهارات التفكير الإبداعي، والتواصل الرياضي، والفهم الرياضي، بالإضافة إلى تحسين قدرات الطلاب على حل المشكلات الرياضية، كما أشارت دراسة Apriliana et al. (2019) إلى فاعلية نموذج ويتلي في تنمية التفكير الناقد في الرياضيات، وأثبتت نتائج دراسة Adnan (2021) أن استخدام نموذج التعلم المستند إلى المشكلة في تدريس الرياضيات يزيد من قدرة الطلاب على التفكير الإبداعي في الرياضيات،

ودراسة Shobirin et al, (2021) التي أشارت نتائجها إلى أن استخدام نموذج ويتلي في تدريس الرياضيات يحسن من مهارات المتعلمين في التفكير النقدي والإبداعي والمنطقي.

في ضوء ما تقدم، واستنادًا إلى ضرورة الإهتمام بتطوير واستخدام نماذج واستراتيجيات حديثة في التدريس تنمي مستويات عمق المعرفة الرياضية، والفهم العميق في الرياضيات، ظهرت فكرة البحث الحالي في إعداد استراتيجية مقترحة قائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي، وقياس فاعليتها في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية، والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية.

الإحساس بالمشكلة:

نبع الإحساس بالمشكلة من خلال عدة نقاط:

- العرض السابق لمقدمة البحث؛ الذي يتضح من خلاله أن تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى المتعلمين من الأهداف الهامة لتعليم وتعلم الرياضيات في جميع المراحل التعليمية بشكل عام وفي المرحلة الإبتدائية بشكل خاص؛ لما لهما من دور واضح في جعل التعلم ذي معني من خلال مساعدة المتعلمين على ربط المعرفة الجديدة بالمعارف السابقة لديهم، وعلى تطبيق ما تعلموه في المواقف الحياتية المختلفة، بالإضافة إلى اكسابهم مهارات التفكير العليا، والقدرة على حل المشكلات واتخاذ القرارات المناسبة؛ ووفقًا لهذا أوصت العديد من الدراسات المرتبطة بتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية كدراسة عبدالرحيم (٢٠٢٠)، ودراسة عبد الملاك (٢٠٢٠)، ودراسة Al-Saadi and Al-Kinani (2021)، ودراسة Khudhair and Jasim (2021) ، ودراسة عبد الله (٢٠٢٢)، والعديد من الدراسات المرتبطة بالفهم العميق في الرياضيات كدراسة Murphy (2016)، ودراسة عبد البر (٢٠١٩)، ودراسة سيد (٢٠٢٢) بضرورة الإهتمام بتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين، وتنمية قدراتهم على الفهم العميق في الرياضيات باعتبارهما من أبرز الإتجاهات الحديثة في مجال تعليم الرياضيات وتعلمها.
- رصدت العديد من الدراسات والبحوث السابقة وجود قصور في معالجة المتعلمين للمعرفة الرياضية بطريقة صحيحة نتجه عنه وجود ضعف واضح في تمكنهم من مستويات عمق المعرفة وخاصًا في المرحلة الإبتدائية؛ حيث أشارت نتائج دراسة كل من إبراهيم، ومرسال

(٢٠٢٢) إلى انخفاض مستوى تمكن تلاميذ المرحلة الإبتدائية من أداءات عمق المعرفة الرياضية، وخاصة في مستويي المفاهيم والمهارات والتفكير الاستراتيجي، بالإضافة إلى انخفاض مستوى تمكن المعلمين من أداءات التدريس وفق مستويات عمق المعرفة الرياضية، وخاصة في مستويي التفكير الاستراتيجي والتفكير الممتد، وأوصت الدراسة بضرورة التدريب المستمرللتلاميذ على أنشطة مستويات عمق المعرفة الرياضية، والتنمية المهنية للمعلمين على كيفية تنمية هذه المستويات لدى التلاميذ، بالإضافة إلى دمجها في مناهج الرياضيات للمراحل الدراسية المختلفة ، كما أشارت دراسة محمد وآخرون (٢٠٢١، ١٩٩) إلى وجود قصور وضعف ملحوظ لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية في مستويات عمق المعرفة، وأكدت الدراسة على ضرورة الإهتمام بتنمية عمق المعرفة الرياضية بما تتضمنه من مهارات معقدة للتفكير لدى التلاميذ؛ لأنها تُعد من الأهداف العامة لتعليم وتعلم الرياضيات بالمرحلة الإبتدائية، كما أشارت دراسة عبد الله (٢٠٢٢، ٢٢٩) إلى ان الاهتمام بتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين ظهر نتيجة المشكلات العديدة الموجودة في المناهج الدراسية الناتجة عن سطحية المعرفة، وتفككها، وضعف ترابطها، وافتقارها للأسس التي تحقق التعمق في المادة العلمية

بالإضافة إلى تأكيد بعض البحوث والدراسات السابقة على وجود تدني وضعف في مستوى الفهم العميق في الرياضيات لدى المتعلمين كدراسة زنقور(٢٠١٨)، ودراسة الحنان (٢٠٢٠)، ودراسة محمد وآخرون (٢٠٢٣)، وقد أرجعت تلك الدراسات هذا التدني إلى اتباع طرق التدريس التقليدية، وعدم إهتمام المعلمين بتشجيع المتعلمين على طرح الأسئلة، وعدم حثهم على توليد الأفكار الجديدة، وعلى تطبيق ما تعلموه في مواقف مختلفة، مما أدى إلى عدم الوصول إلى تحقيق مستويات مناسبة من الفهم.

- توصيات بعض الدراسات السابقة بضرورة توظيف النماذج التدريسية المنبثقة من النظرية البنائية والتوسع في استخدامها في مختلف المراحل الدراسية؛ لما تتميز به خصائص تساعد المتعلم في بناء المعرفة، وتتيح له فرص للتفاعل والمشاركة الإيجابية، حيث قدمت دراسة Al-Saadi and Al-Kinani (2021) عدة توصيات تؤكد ضرورة استخدام الطرق والأساليب التدريسية التي من شأنها تطوير مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين، والإبتعاد عن الأساليب الروتينية لعرض المادة التعليمية، وكذلك الإهتمام بتنوع

الأنشطة المختلفة التي تنمي عمق المعرفة الرياضية، ومهارات معالجة المعرفة، وربطها بحياة المتعلم، حيث أكدت على أن القصور والنقص في مستويات عمق المعرفة لدى التلاميذ يعود إلى استخدام الأساليب التقليدية في التدريس، وأوصت دراسة Eze et al. (2020) بضرورة اعتماد المدارس للنماذج البنائية وخاصة نموذج التلمذة المعرفية اعتمادًا رسميًا في التدريس لجميع المراحل التعليمية.

- **المقابلات الشخصية والمناقشات التي تم اجرائها مع موجهي ومعلمي الرياضيات في بعض المدارس الإبتدائية أثناء الإشراف على التربية العملية، حيث تم التأكيد فيها على أن نظم التقويم السائدة في المدارس اهتمامها الأكبر ينصب على المستويات الدنيا وتقويم الجانب المعرفي فقط دون الإهتمام بباقي المستويات؛ فالإهتمام الأكبر منصب على حصول التلاميذ على أعلى الدرجات في الاختبارات التحصيلية في الرياضيات بصرف النظر عن عمق المعرفة وأيضًاعلى حساب الفهم أو المعنى.**
- **حضور بعض حصص الرياضيات مع المعلمين، وملاحظة وجود ضعف لدى التلاميذ في فهم بعض المفاهيم والتعميمات الرياضية بشكل عميق وعدم فهم العلاقات بينهما وذلك لكثرت المفاهيم والتعميمات وتشابهها وتجردها، بالإضافة إلى عدم قدرة التلاميذ على الإحتفاظ بالمعرفة لمدة طويلة، كما أن الكثير من التلاميذ لديهم القدرة على حفظ خطوات حل المشكلة الرياضية دون فهم واستيعاب عميق لهذه الخطوات وعدم قدرتهم على طرح الأسئلة وتوليد الأفكار جديدة؛ نتيجة عدم اهتمام المعلمين بكيفية معالجة المتعلمين للمعرفة وكيفية ربطها بالمعارف السابقة لديهم، وتنظيمها داخل بنيتهم المعرفية، كما أن معظم الأنشطة التي تقدم لهم أنشطة تقليدية تعتمد على المعلومات السطحية التي لا تتعدى المستويات المعرفية الأولى.**
- **الدراسة الاستكشافية التي تم اجرائها؛ والتي تمثلت في تطبيق اختبار لمستويات عمق المعرفة الرياضية، واختبار للفهم العميق في الرياضيات على عينة قوامها (٣٠) تلميذًا بالصف السادس الإبتدائي، ويوضح الجدول التالي نتائج الدراسة الاستكشافية:**

جدول (١)
نتائج الدراسة الاستكشافية.

الاداه	مستوى التلاميذ					
	منخفض (أقل من ٥٠%)		متوسط (من ٥٠% إلى ٧٥%)		مرتفع (أكبر من ٧٥%)	
	ن	%	ن	%	ن	%
اختبار عمق المعرفة الرياضية	٢٠	٦٦,٦%	٦	٢٠%	٤	١٣,٣%
اختبار الفهم العميق في الرياضيات	٢١	٧٠%	٧	٢٣,٣%	٢	٦,٧%

يتضح من الجدول السابق تدن مستوى التلاميذ في عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات؛ حيث حصل (٦٦,٦% من التلاميذ) على درجات أقل من ٥٠% من النهاية العظمى لدرجة اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية، وحصل (٧٠% من التلاميذ) على درجات أقل من ٥٠% من النهاية العظمى لدرجة اختبار الفهم العميق في الرياضيات.

وبناءًا على ما سبق استشعرت الباحثتان الحاجة إلى إجراء هذا البحث ومحاولة تنمية عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية من خلال استخدام استراتيجية مقترحة قائمة على نموذجين من نماذج النظرية البنائية (نموذج التلمذة المعرفية، ونموذج ويتلي).

مشكلة البحث وتساؤلاته :

تمثلت مشكلة البحث في ضعف مستويات عمق المعرفة الرياضية، وأبعاد الفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؛ وللتصدي لتلك المشكلة ومحاولة حلها يحاول البحث الحالي الإجابة عن السؤال الرئيس التالي:

"ما فاعلية استراتيجية تدريسية مقترحة قائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؟"

ويتفرع من هذا السؤال الرئيس الأسئلة التالية:

١. ما مستويات عمق المعرفة الرياضية التي يجب تنميتها لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؟

٢. ما صورة الوحدة التعليمية المعاد صياغتها وفقًا للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي لتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؟

٣. ما فاعلية الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى تلاميذ الصف االسادس الإبتدائي؟

٤. ما فاعلية الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؟

٥. ما العلاقة الارتباطية بين درجات التلاميذ في اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ودرجاتهم في اختبار الفهم العميق في الرياضيات.

أهداف البحث:

تمثلت أهداف البحث الحالي فيما يلي:

١. قياس فاعلية الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؟

٢. قياس فاعلية الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؟

٣. إيجاد العلاقة الارتباطية بين مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات.

أهمية البحث:

تظهر أهمية البحث الحالي في الآتي:

١. الأهمية النظرية: محاولة الإسهام في تقديم إطار نظري يلقي الضوء على أهمية نموذجين من نماذج النظرية البنائية (نموذج التلمذة المعرفية، ونموذج ويتلي) في التدريس، ويوضح أهمية تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في

الرياضيات لدى المتعلمين بإعتبارهما هدفين أساسيين يجب تضمينهما في مناهج الرياضيات.

٢. الأهمية التطبيقية: تكمن في النقاط التالية:

- **تقديم استراتيجية مقترحة تساعد معلمي الرياضيات على تحسين عملية التدريس عن طريق تقليل الفجوة بين اكتساب المعرفة، وفهمها، والتعمق فيها، وتطبيقها واستخدامها في المواقف الحياتية المختلفة؛ مما يساعدهم في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق لدى التلاميذ.**
- **الإستفادة من دليل المعلم القائم على الاستراتيجية المقترحة في تدريب المعلمين على كيفية تطبيق نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي في عملية التدريس؛ لإثراء العملية التعليمية بشكل أفضل.**
- **توجيه نظر مخططي وواضعي المناهج إلى ضرورة تضمين مستويات عمق المعرفة الرياضية في كتب الرياضيات لتلاميذ المرحلة الإبتدائية، والتركيز على أبعاد الفهم العميق عند إعداد الكتب الخاصة بهذه المرحلة.**
- **تقديم مجموعة من المقترحات للبحوث التي تتناول نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي؛ لفتح آفاق جديدة أمام الباحثين للبحث والتجريب مع متغيرات تابعة أخرى وفي مراحل تعليمية مختلفة.**
- **تقديم مجموعة من التوصيات والمقترحات؛ التي تفيد الباحثين في التعمق البحثي في النماذج البنائية، وتوظيفها في تعليم وتعلم الرياضيات.**
- **فتح آفاق جديدة أمام الباحثين لعمل دراسات تتعلق بكيفية تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات بإستخدام نماذج واستراتيجيات مختلفة.**
- **إستفادة طلاب الدراسات العليا والبحث العلمي من اختبارى مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات.**

حدود البحث:

اقتصر البحث الحالي على الحدود التالية:

١. حدود موضوعية:

- **وحدة "الهندسة والقياس" بكتاب الرياضيات للصف السادس الإبتدائي الفصل الدراسي الأول.**
- **الأبعاد التالية للفهم العميق في الرياضيات: التفكير التوليدي (الطلاقة، المرونه، التعرف على الأخطاء والمغالطات) – طرح الأسئلة – التفسير – اتخاذ القرار.**

٢. حدود بشرية: عينة من تلاميذ الصف السادس الإبتدائي؛ حيث تعد هذه المرحلة بداية التشكيل المعرفي لعقل التلميذ، وبداية تكوين رصيده المعرفي الذي من خلاله سوف يتم تعلم الرياضيات في المراحل التعليمية القادمة.

٣. حدود مكانية: تم تطبيق هذا البحث بمدرسة (الشهيد أحمد عبدالله الزقاقي) بإدارة ميت غمر التعليمية، محافظة الدقهلية.

٤. حدود زمانية: تم تطبيق البحث خلال الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠٢١/٢٠٢٢ م.

مواد البحث وأدواته:

١. قائمة بمستويات عمق المعرفة الرياضية الواجب تنميتها لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية.

٢. دليل المعلم المُعد في ضوء الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي.

٣. أوراق عمل التلميذ.

٤. اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية.

٥. اختبار الفهم العميق في الرياضيات.

منهج البحث: تم استخدام ما يلي:

١. **المنهج الوصفي؛ لاستقراء الأدبيات والدراسات والبحوث ذات الصلة بمتغيرات البحث.**
٢. **المنهج التجريبي، ذو التصميم التجريبي القائم على المجموعتين؛ لمعرفة تأثير المتغير المستقل (الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي) على المتغيرين التابعين (عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات) لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي.**

تحديد مصطلحات البحث:

من خلال الرجوع إلى الدراسات السابقة والإطار النظري، تم التوصل إلى التعريفات الإجرائية التالية لمتغيرات البحث والتي تتفق مع أهدافه:

١. **الاستراتيجية المقترحة:**

مجموعة من الخطوات والإجراءات المنظمة المبنية على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي التي يتم وضعها من قبل المعلم؛ لينفذها في عملية تدريس وحدة "الهندسة والقياس" من مقرر الرياضيات للصف السادس الإبتدائي بطريقة متقنة؛ لتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى التلاميذ.

٢. **نموذج التلمذة المعرفية** (Cognitive Apprenticeship)**:**

نموذج تدريسي يتيح للمعلم نمذجة المواقف الرياضية وتقديم مواقف ومشكلات مشابهة لها للتلاميذ لحلها، ثم يمارس المعلم دور الخبير ويطرح التساؤلات التي تشجع التلاميذ على التأمل والتعبير، مع تقديم الدعم المطلوب الذي يمكن التلاميذ من حل المشكلات الرياضية قبل أن يبدأ دوره في التلاشي تتدريجيًا.

٣. **نموذج ويتلي** (Wheatley Model)**:**

نموذج بنائي تعليمي يعتمد على مرور المتعلم بمواقف ومشكلات واقعية، ويتطلب منه المواجهة والتفكير في ايجاد الحلول لهذه المشكلات والمواقف مستخدمًا عمليات البحث والإستقصاء والتفكير المنطقي من خلال ربط المعرفة السابقة ودمجها مع المعرفة الحالية، والمشاركة بتبادل الأفكار والآراء في مجموعات صغيرة، ثم مشاركة جميع المتعلمين في الفصل؛ للوصول إلى حل للمشكلة المطروحة.

٤. **عمق المعرفة الرياضية** (Depth of Mathematical knowledge) :

كم المعارف والمهارات التي يجب أن يتمكن منها تلميذ الصف السادس الإبتدائي في مادة الرياضيات من أجل فهم المحتوى الرياضي، والقدرة على ربط المعرفة الجديدة بالمعرفة السابقة، وحل المشكلات الرياضية وأداء المهمات بنجاح، وتطبيق المعرفة المكتسبة في سياقات مختلفة؛ ليصبح التعلم ذو معنى ومغزى بالنسبة له.

٥. **الفهم العميق في الرياضيات** (Deep understanding in mathematics):

مجموعة العمليات الذهنية التي يقوم بها تلميذ الصف السادس الإبتدائي؛ لفهم المحتوى الرياضي والتي يقوم من خلالها بالفحص الناقد المفاهيم والأفكار الرياضية، وعمل ترابطات متعددة بين تلك الأفكار، وتوليد أفكار جديدة ومتعددة ومختلفة تتميز بالطلاقة والمرونه، وتقديم تفسيرات منطقية للمواقف الرياضية، وطرح التساؤلات، واتخاذ القرارات بالإضافة إلى قدرته على تطبيق ما تعلمه في مواقف جديدة.

الإطار النظري والدراسات السابقة :

المحور الأول: التلمذة المعرفية (Cognitive Apprenticeship):

معظم عمليات التعليم والتعلم تتم عن طريق نقل العلم من شخص عالم إلى متعلم، دون حث المتعلم على التفكير، وهذا هو المفهوم التقليدي للتلمذة أو ما يسمى بالتلمذة التقليدية، فهو أشبه بتقليد أداء مهمات تعليمية وتكرارها حتى الإتقان.

وقد ضع كولينز وزملاؤه للتلمذة التقليدية أطر علمية وأطلقوا عليها مسمى التلمذة المعرفية؛ لتقدم كنموذج للتدريس في المدارس يستهدف جعل عمليات التفكير واضحة ومرئية، حيث أن تعليم المعارف والمهارات المختلفة يتضمن عمليات لايمكن للطلاب والمعلمين ملاحظتها كعمليات التفكير التي لا تكون مرئية؛ لذا فالتلمذة المعرفية تُعد تطورًا للتلمذة التقليدية (Collins et al.,1991 ؛ Levin et al., 2021, 836 ؛ Rucker et al., 2021, 61)

وذكرت دراسة كل من Matsuo and Tsukube (2020,2) أن التلمذة المعرفية هى دمج ما بين التلمذة التقليدية والنظرية المعرفية التي تؤكد على أن وعي المتعلم

بما اكتسبه من معرفة وبطريقة اكتسابها يزيد من نشاطه الميتامعرفي، ويُحدث تغييرا إيجابيًا في سلوكه.

لذا أكدت دراسة Collins et al. (2018, 459) على أننا نكاد نجزم أن التلمذة المعرفية هى الطريقة الوحيدة للتعلم، فالبرغم من أن قراءة كتاب أو الإستماع إلى محاضرة تعد من الطرق المهمة للتعلم، إلا أن المتعلم لن يتعلم من خلالهما بقدر ما يتعلم من خلال التلمذة المعرفية، لأن التلمذة المعرفية تجبرهم على استخدام وتطبيق المعرفة التي تم اكتسابها في مواقف مختلفة.

مفهوم نموذج التلمذة المعرفية:

عرف كل من Dennen and Burner (2008, 427) نموذج التلمذة المعرفية بأنه التعلم الذي يُكسب المتعلم المهارات والعمليات المعرفية وما وراء المعرفية من خلال التجربة الموجهة.

كما عرف عثمان وآخرون (٢٠١٧، ١٧٩) نموذج التلمذة المعرفية بأنه: نموذج بنائي يتم فيه إشراك المتعلم في ممارسات حقيقية من خلال التفاعلات الإجتماعية والأنشطة؛ حتى يتقدم المتعلم نحو مستوى الأداء الذي يماثل مستوى أداء الخبير، وذلك عن طريق المساعدات والتغذية الراجعة التي يقدمها له الخبير.

وعرفه كل من البلوي، والصامدي (٢٠١٧، ٣٤٩) بأنه: بناء محكم يستخم لتصميم المادة التعليمية على هيئة مواقف تعليمية حقيقية يتم فيها مساعدة المتعلمين في بناء تفكيرهم الرياضي من خلال معلم خبير، أو من خلال زملائهم، بحيث يكون العمل ضمن مهمات حقيقية تحقق الهدف المرغوب تحقيقه، ويتم تنفيذ المهمات في سياق اجتماعي تعاوني محفز للمتعلمين.

بينما عرف كل من المشهداني والشمري (٢٠١٧، ٧٤)، وكل من خير الله ودريع (٢٠١٩، ٤٦٩) نموذج التلمذة المعرفية بأنه: "مجموعة من المراحل التعليمية التعلمية البنائية والتي من خلالها يتم نمذجة المواقف التعليمية (الفعلية والعملية)، وتسقيلها، والتدريب عليها، والتأمل عن طريق المقارنة والتوضيح والتفسير والتعبير والإستكشاف من خلال عمل الطلاب مع بعضهم البعض، ويكون العمل ضمن مهام حقيقية لتطبيق ما تعلموه ضمن مواقف فعلية مرتبطة بالواقع ".

وعرفه فايز محمد (٢٠١٩، ٥٩٢) بأنه: "مجموعة من الاجراءات والأساليب التي يقوم بها التلميذ تحت إشراف وتوجيه وإرشاد من المعلم ليكون على وعي وإدراك بعمليات تفكيره، وإدارتها طبقًا للأساليب التالية: النمذجة، التفسير، التدريب، السقالات، التأمل، التعبير، الاستكشاف."

بينما ترى كل من العتيبي والفهد (٢٠٢٠، ١٠) أن التلمذة المعرفية نظرية تعليمية تعلمية تعمل على مرونة التفكير، وتعديله تعديلاً قصديًا؛ للإنتقال بالمتعلم من المستوى الأقل كفاءة وخبرة إلى المستوى الأكثر كفاءة وخبرة عن طريق المساعدة والتوجيه من قبل المعلم، والإهتمام بإيجاد الظروف المناسبة والمثلى لبيئة التعلم.

في حين يرى كل من Matsuo and Tsukube (2020,1) أن التلمذة المعرفية هى استراتيجية تعليمية لتعليم المهارات المعرفية التي يستخدمها الخبراء في حل المشكلات المعقدة، والتي لا يمكن للمتعلمين ملاحظتها بسهولة.

ويذكر الحنان (٢٠٢١، ١٦١)، وسعد (٢٠٢٢، ٤٢٦) أن نموذج التلمذة المعرفية يشمل مجموعة الإجراءات التعليمية التعلمية التي تجعل التلميذ نشطًا وفعالاً في نمذجة المواقف وتوليد وبناء واستنتاج المعرفة الرياضية واستخدامها والتعبير عنها، وإدراك العمليات العقلية للمهمة عند تطبيق ما تعلمه في المواقف المختلفة تحت توجيه المعلم.

كما يعرفه كل من Johnson–Laghi and Mattar (2022, 366) بأنه: طريقة للتدريب تعطي الأولوية لفهم المتعلم وتطبيق المعرفة في مهام الحياة الواقعية.

ويعرفه Pristel et al, (2022, 35) بأنه: نموذج تعليمي بنائي إجتماعي يتعلم فيه الطالب المهارات والعمليات المعرفية وما وراء المعرفية من شخص أكثر خبرة.

بينما يعرفه كل من Mannion and Brown (2022, 4) بأنه: نموذج تعليمي عالي الكفاءة يتعلم الطالب فيه بطريقة متعمدة ومدعومه، تأخذ في الإعتبار مجتمعات الممارسة واحتياجات المتعلم.

في ضوء ما سبق وبإستقراء التعريفات السابقة يتضح أن نموذج التلمذة المعرفية يدعم التعلم الفعال، ويساعد المتعلم على اكتساب وبناء المعرفة من خلال نشاطه الذاتي القائم على الملاحظة المباشرة للخبراء أثناء أداء المهمات التعليمية، ثم التدريب على آداء المهمات الحقيقية في سياق إجتماعي تحت إشراف وتوجيه المعلم؛ للوصل بالمتعلم لمستوى

الإتقان، والإنتقال به من مرحلة الفهم إلى مرحلة التعميم والتطبيق في مواقف الحياة المختلفة.

واستنادًا إلى ذلك يعرف نموذج التلمذة المعرفية إجرائيًا بأنه: نموذج تدريسي يتيح للمعلم نمذجة المواقف الرياضية وتقديم مواقف ومشكلات مشابهة لها للتلاميذ لحلها، ثم يمارس المعلم دور الخبيرويطرح التساؤلات التي تشجع التلاميذ على التأمل والتعبير، مع تقديم الدعم المطلوب الذي يمكن التلاميذ من حل المشكلات الرياضية قبل أن يبدأ دوره في التلاشي تتدريجيًا.

الأسس التي يستند إليها نموذج التلمذة المعرفية:

نموذج التلمذة المعرفية يقوم على أساس أن التعلم الحقيقي يحدث عن طريق اكتشاف المعرفة من خلال التعلم النشط، ومن خلال الحوار والمناقشة، ومن خلال الإنخراط النقدي في وجهات النظر الآخرى، (Mannion, & Brown, 2022, 4)

حيث يعتمد نموذج التلمذة المعرفية على "التعلم القائم على النشاط"؛ فمن الضروري تضمين النشاط في التعلم، واستخدام السياق الإجتماعي والمادي بشكل متعمد، وتزويد المتعلمين بفرص للمشاركة في الأنشطة، والإنخراط في المجتمع (Matsuo, & Tsukube, 2020,1)

ويذكر Napari (2020, 5) أن التلمذة المعرفية تقوم على فكرة ضرورة أن يقع التفكير في السياقات الاجتماعية والمادية للمتعلم وليس داخل عقل المتعلم؛ لذا فمن المنطقي إنشاء تجربة تعليمية قريبة جدًا من المواقف الحقيقية قدر الإمكان، وهذا يتطلب إعادة تصميم المناهج وطرق التدريس لجعلها ذات صلة بالبيئة الثقافية والاحتياجات التعليمية والنفسية والاجتماعية والاقتصادية للمتعلمين.

كما يذكر كل من Wedelin and Adawi (2014, 49) أن التلمذة المعرفية تقوم على أساس النهج الإستقرائي في التدريس والتعلم، حيث يتعلم الطلاب المهارات المعرفية المعقدة من خلال ممارسة المهام.

في ضوء ما سبق نستنتج أن نموذج التلمذة المعرفية يستند إلى مجموعة من الأسس التي يجب أن تراعى عند تصمم التعلم وفقًا للتلمذة المعرفية، يمكن تلخيصها فيما يلي:

١- اشتراك المتعلم بفاعلية في المواقف التعليمية.

٢- تقديم مهمات تعليمية معقدة تحتاج إلى فكر عميق.
٣- نمذجة المهمات للتلاميذ من قبل المعلم، وتبسيطها من خلال السقالات.
٤- تنمية قدرة المتعلم على التعبير وعرض ما توصل إليه من معرفة.
٥- تنمية قدرة المتعلم على التأمل، والحصول على فرص متساوية للفهم وتنفيذ المهام.
٦- تقييم أداء المتعلم، ومدى تحقيقه للأهداف، والوقوف على مدى تمكنه من المعرفة وملاحظة أدائه.
٧- ضرورة تمكن المتعلم من المهارات التي يفترض تعلمها من خلال تطبيقها بالحياة اليومية.

أساليب التدريس وفقًا لنموذج التلمذة المعرفية:

لكي نخلق بيئة تلمذة معرفية ينبغي أن تكون ممارسات المتعلم في سياقات واقعية متكاملة؛ حتى يتمكن المتعلم من تطوير نظامه المعرفي ونماذجه المعرفيه، لذا يجب تكليف المتعلمين بمهام حقيقية وأعمال فعلية مثل مهام حل المشكلات، أو شرح ظاهرة صعبة، أو تحليل المواقف، أو المشاركة في المناظرات بمصداقية وموضوعية؛ ولتحقيق ذلك تستخدم بعض الأساليب في تنشيط وتدعيم بيئة التلمذة المعرفية (تمساح ، ٢٠٢٠ أ، ٩٣).

وقد تم اقتراح ستة أساليب للتدريس وفقًا للتلمذة المعرفيه؛ لتطوير وتعزيز الخبرة وتوضيح دور كل من المعلم والمتعلم، وتم تصنيفهما إلى ثلاث مجموعات: Collins et al.,1991؛ (Collins et al., 1991) ؛ Pinto & Zvacek, 2022, 58) ؛ 2006, 51

- المجموعة الأولى: وهى التي تساعد المتعلمين على اكتساب المعرفة والمهارات من خلال عمليات المراقبة، والممارسة الموجهة والمدعومة؛ لذا فهى تعُد أساس وجوهر التلمذة المعرفية، وتضم كل من: النمذجة، والتدريب، والسقالات.
- المجموعة الثانية: وهى التي تساعد المتعلمين على التركيز في ملاحظة حل المعلم الخبير للمشكلة، وفي التدريب والتعمق في حل الشكلات؛ ليصبحوا على دراية باستراتيجيات حل المشكلات الخاصة بهم وتضم: التعبير، والتأمل.
- المجموعة الثالثة: تنمي لدى المتعلمين القدرة على التعلم الذاتي، والاستقلالية في التعلم، وتضم: الإكتشاف

وفيما يلي توضيح لتلك الأساليب: (Butler, ؛ Dennen, & Burner, 2008, 427 ؛ Terpstra et al, 2019, 932 ؛ Johnson-Laghi, & Mattar, 2022, 366 ؛ Lo & Tsai, & King, 2021, 116 ؛ Mannion, & Brown, 2022, 2 ؛ Napari, 2020, 6-7 ؛ 2022,8)

١- النمذجة Modeling : عبارة عن عرض وتمثيل للأفكار والمعلومات التي يحتويها الدرس واللازمة لتنفيذ المهمات التعليمية التي يقدمها المعلم؛ حيث يقوم المعلم الخبير بعرض العمليات والطرق والاستراتيجيات اللازمة لتنفيذ المهمات التعليمية، ويلاحظ المتعلم التطبيق العملي لهذه المهمة من خلال ملاحظة أداء المعلم لها وكيفية تنفيذها بإتقان، وينحصر دور المتعلم في المشاهدة، والملاحظة، والرصد، والإستماع، كما يُسمح له بالتفكير بصوت مسموع، ويكتسب المتعلمين في هذة المرحلة مجموعة من المهارات المعرفية عن طريق الملاحظة لأداء المهارة بشكلها الصحيح.

٢- التدريب Coaching : من أهم أساليب التلمذة النعرفية؛ حيث يدرب المعلم المتعلمين من خلال مجموعة واسعة من الأنشطة، والمهام التعليمية، ثم يحاول المتعلمين تنفيذ المهام المكلفين بها، ويلاحظهم المعلم أثناء محاولاتهم تنفيذ المهمات التعليمية، ويزودهم بالمساعدات والعبارات التذكرية والتحفيز، والتشجيع، والتغذية الراجعة عند الحاجة؛ لجعل أدائهم قريب من اداء الخبير.

٣- السقالات Scaffolding : وهى تشير إلى الدعم المقدم للمتعلمين لإنجاز المهام المكلفين بها؛ حيث يقدم المعلم من خلال هذا الأسلوب مجموعة من البرامج والانشطة التعليمية التي تزيد من مستوى الفهم والمعرفة لدى المتعلمين، ثم يقدم لهم المساعدات الوقتية مع تقليل مستوى المساعدة وفقًا لمستوى التقدم بالقدر الذي يسمح لهم بمواصلة أداء الأنشطة ذاتيًا، والدعم في تنفيذ المهمة يمكن أن يتراوح بين القيام بالمهمة كاملةً أو إعطاء المساعدات من حين لآخر حول ما يجب القيام به بعد ذلك، إلا أن يتم الاستغناء عن المساعدة نهائيًا ويصبح المتعلم قادرًا على إكمال المهمه بمفرده.

٤- التعبير Articulation : في هذا الأسلوب يتم طرح أسئلة على المتعلمين؛ ليعبروا عن معارفهم من خلال الإجابة عن هذه الأسئلة، ويتم تفكير المتعلمين بصوت عال،

وتبرير قراراتهم، والتعبير عن معرفتهم واستراتيجياتهم في حل المشكلات، وذلك من خلال استراتيجية التساؤل الذاتي أو التأمل الذاتي الذي يهدف إلى تعميم فهم المتعلم لذاته.

وفي هذه المرحلة يقوم المتعلم بشرح سلوكه للآخرين؛ مما يجعل معرفته أكثر وضوحًا في ذهنه، ويجعله قادرًا على تنظيم معرفته وتعميمها وتطبيقها على المشكلات والمواقف ذات الصلة، ويبقى دور المعلم في هذه المرحلة التوجيه وتصحيح المفاهيم والممارسات غير الصحيحة.

٥- التأمل **Reflection** : الهدف منه هو اعطاء المتعلم الوقت والفرصة ليعيد النظر في جهوده التي بذلها، فيبدأ بتحليل أدائه، وتحليل ما تعلمه، ومقارنة عملياته لحل المشكلات بتلك التي يمتلكها الخبير، بالإضافة إلى مقارنة انجازاته مع زملائه؛ لمعرفة كيف يمكنه تحسين عمله فيما بعد، ولتشخيص الصعوبات التي تواجهه لتعديل أدائه تدريجيًا.

حيث يحدث التأمل عندما يطلب المعلم من الطلاب تقييم أدائهم وتفكيرهم بالمقارنة مع الآخرين، والتفكير في نقاط القوة والضعف في نماذجهم الأولية، وتمييز الممارسات الجيدة من غير الجيدة، والتفكير في تلك النتائج وتحديد التحسينات التي يمكن إجراؤها (**Pristel, et al, 2022, 37**).

٦- الاستكشاف **Exploration** : وهو تشجيع المتعلمين ودفعهم لتجريب فرضيات واستراتيجيات مختلفة وملاحظة أثرها، والتقصي، والبحث عن المعرفة باستقلالية؛ فيتعلم الطلاب أن يضعوا مهام مختلفة عن المهام السابقة ويعملون على مواجهتها ويبحثون عن المعرفة باستقلالية، ويحدث الاستكشاف عندما يشجع المعلم الطلاب على حل المشكلة بشكل أساسي بأنفسهم.

ومن خلال الأساليب السابقة للتلمذة المعرفية نستخلص أن الثلاث أساليب الأولى: النمذجة والتدريب والسقالات مصممة لتساعد المتعلم على اكتساب المهارات من خلال الملاحظة والممارسات المدعومة، وأسلوبي التعبير والتأمل يساعدان المتعلم على التمكن والسيطرة من استراتيجيات حل المشكلات الخاصة به، أما أسلوب الاستكشاف فهو يساعد المتعلم على الإستقلالية من خلال التلاشي المتعمد من قبل المعلم للمساعدات والتغذية الراجعة.

أهداف التلمذة المعرفية:

إن الهدف الأساسي للتلمذة المعرفية هو استخدامها لتعليم المهارات اللامعرفية التي تتطلب عمليات تفكير داخلية لا يمكن أن يلاحظها المعلم أو المتعلم بسهوله (Butler et al, 2019, 931)، ووضع المعرفة المجردة في سياقات الممارسة، وتنمية مهارات المراقبة الذاتية لدى المتعلم؛ لتمكينه من القيام بالمهام بشكل مستقل (Matsuo & Tsukube, 2020,4)

بينما يرى كل من Pinto and Zvacek (2022, 53) أن الهدف الأساسي لنموذج التلمذة المعرفية هو مساعدة الطلاب على الدمج ما بين الإدراك واستراتيجيات ما وراء المعرفة لاكتساب واستخدام وإدارة واكتشاف المعرفة.

حيث أن التلمذة المعرفية تجعل المتعلم أكثر وعيًا وفهمًا لعملية تفكيره؛ فيستطيع المتعلم تشكيل أفكاره وآداءاته من خلال ممارسات حقيقية يقوم بها (تمساح ، ٢٠٢٠أ، ٩٨).

بالإضافة إلى جعل المتعلمين مفكرين، معبرين عن آرائهم، باحثين، لديهم حب الإستطلاع والبحث عن تفسير كل شئ غامض يواجههم (الربيع، ٢٠٢١، ٣٠).

مما سبق نستخلص أن الهدف الرئيس للتلمذة المعرفية هو مساعدة المتعلم على كيفية التفكير وكيفية اكتساب المعرفه والمهارات من خلال السياقات الحقيقية، بالإضافة إلى كيفية تطبيقها وتوظيفها في الحياة الواقعية؛ حيث أنه من خلال مرحلة النمذجة التي تقدمها التلمذة المعرفية يرى المتعلم تقنيات واجراءات حل المشكلة ضمن السياق الحقيقي، ثم يقوم بالتدريب عليها في وجود التوجيه والتسقيل اللازم إلى أن يقوم المتعلم بشكل فردي بحل المشكلات التي تواجهه.

مميزات التدريس استخدام نموذج التلمذة المعرفية:

التدريس بإستخدام نموذج التلمذة المعرفية، يحقق المميزات التالية: (خير الله، دريع، ٢٠١٩، ٤٧٥ ؛ Butler, et al, 2019, 931 ؛ الربيع، ٢٠٢١، ٢٩ ؛ Rucker, et al, 2021, 835 ؛ Hasan, et al, 2022, 157 ؛ Levin, et al, 2021, 70)

١- يجعل المتعلم نشطًا مشاركًا في العملية التعليمية، متحملاً لمسئولية تعلمه.
٢- يدعم التعلم من أجل ثقافة التفكير وبناء القدرات الذهنية لدى المتعلمين.
٣- يساعد المتعلم على عمق التعلم واكتساب المهارات المعرفية وفوق المعرفية، كما يمكنه من مهارات البحث والتقصي والإستطلاع.
٤- يعلم المحتوى التعليمي عبر أنشطة لحل المشكلات وليس مجرد حفظ للمعلومات.
٥- يوفر فرص حقيقية لتطبيق ما تم تعلمه في مواقف تعليمية مختلفة، ويجعل التعلم ذا معنى.
٦- يشجع على التدريب والتوجيه ويركز على الإتقان والممارسات.
٧- ينمي الثقة بالنفس لدى المتعلمين، ويزيد دافعيتهم للتعلم.
٨- يزيد من مهارات المتعلمين وقدراتهم على التعلم الذاتي وحل المشكلات.
٩- ينمي لدى المتعلمين القدرة على النقد، وبناء التفسيرات، وتحليل الأدلة، واقتراح الحجج، والكتابة الجدلية.

وتشير دراسة Pristel et al, (2022, 38) إلى أن استخدام نموذج التلمذة المعرفية في التدريس يعزز مهارات التفكير العليا لدى الطلاب من خلال التحفيز و إشراك المتعلمين في أنشطة حقيقية، وتعزيز مهارات ما وراء المعرفة، وفهم الطريقة التي كان يفكر بها الطلاب وتقديم ملاحظات فورية لتوجيه الطلاب ودعمهم، والتوازن بين تقديم المساعدة والتراجع عن عمد .

ويمكن أن يضيف البحث الحالي المميزات التالية لنموذج التلمذة المعرفية:

١- يجعل الصف الدراسي بيئة تعليمية مشوقة يسودها الحوار والمناقشة وحب الإستطلاع والتحدي والإستكشاف
٢- يساعد على إثارة إهتمام الطلاب بموضوع التعلم.
٣- يعزز مهارات التفكير العليا والفهم العميق لدى المتعلمين؛ فهو يقدم تعلم قائم على الفهم والمعنى ومتصل بحياة المتعلمين.
٤- يزيد من شعور المتعلمين بالقدرة على الإنجاز، وإتخاذ القرارات.

وبالإضافة إلى المزايا السابقة، أكدت العديد من الدراسات السابقة نجاح وفعالية نموذج التلمذة المعرفية في التعليم والتعلم، وتناولت آثاره الإيجابية على نواتج التعلم مثل: دراسة

(الجبر، ٢٠١٣) التي أثبتت نتائجها الأثر الإيجابي لاستخدام استراتيجية التلمذة المعرفية الإلكترونية على تنمية حل المشكلات الرياضية والدافعية للتعلم لدى طالبات السنة التحضرية بالمملكة العربية السعودية، واستخدمت دراسة Wedelin & Adawi (2014) نموذج التلمذة المعرفية في تدريس الرياضيات لتنمية القدرة على النمذجة الرياضية، وحل المشكلات الرياضية، وأشارت نتائج الدراسة إلى وجود تطورًا ملحوظًا فيما يتعلق بمهارات الطلاب في النمذجة وحل المشكلات بعد استخدام نموذج التلمذة المعرفية، ودراسة كل من المشهداني والشمري (٢٠١٧) التي هدفت إلى قياس أثر استخدام استراتيجية التلمذة المعرفية على تحصيل مادة الرياضيات وتنمية التفكير الجانبي لدى طالبات الصف الأول المتوسط، وكان من نتائج الدراسة تفوق تلاميذ المجموعة التجريبية على تلاميذ المجموعة الضابطة في اختباري التحصيل والتفكير الجانبي في الرياضيات، ودراسة البلوي والصمادي (٢٠١٧) التي أثبتت فاعلية إستخدام إستراتيجية التلمذة المعرفية في تنمية مهارات التفكير الرياضي لدى طلاب السنة التحضيرية في جامعة تبوك، في حين استخدمت دراسة فايز محمد (٢٠١٩) استراتيجية التلمذة المعرفية لتنمية مهارات التفكير الجانبي وخفض قلق الرياضيات لدى تلاميذ الصف الأول الإعداي، أما دراسة كل من خير الله، ودريع (٢٠١٩) أشارت نتائجها إلى الأثر الفعال لاستخدام استراتيجية التلمذة المعرفية على تنمية مهارات التفكير الإستدلالي في الرياضيات لدى طلاب الصف الثاني المتوسط، واستخدمت دراسة كل من Matsuo and Tsukube (2020)، ودراسة Doucette, et al. (2020) نموذج التلمذة المعرفية في التنمية المهنية للمعلمين؛ لتنمية الكفاءات التدريسية والمهنية لدى المعلمين أثناء الخدمة، وتحسين الممارسات التديسية، ورفع مستوى الكفاءة الذاتية لدى المعلمين، في حين استخدمت دراسة الجندي (٢٠٢٠) نموذج التلمذة المعرفية لتنمية مهارات حل المسألة الرياضية اللفظية والنزعة الرياضياتية المنتجة لدى تلاميذ الصف الخامس الإبتدائي، وتحققت دراسة Eze et al. (2020) من تأثير نموذج التلمذة المعرفية على التحصيل الأكلديمي للطلاب والاحتفاظ بالمعرفة في تدريس مقرر تكنولوجيا ميكانيكا السيارات لدى طلاب التعليم المهني في نيجيريا، وتوصلت نتائج الدراسة إلى حصول تلاميذ المجموعة التجريبة اللذين درسوا باستخدام التلمذة المعرفية على درجات أعلى في الاختبار التحصيلي مقارنة بتلاميذ المجموعة الضابطة اللذين درسوا بالطريقة التقليدية، إلى جانب احتفاظ تلاميذ المجموعة

التجريبية بالمعرفة التي تعلموها فترة زمنية أطول، ودراسة كل من العتيبي والفهد (٢٠٢٠) التي أعدت برنامج تدريسي قائم على التلمذة المعرفية، وأثبتت فاعليته في تنمية مهارات التفكير الجانبي والتواصل الرياضي لدى طالبات الصف الأول الثانوي بمدينة الرياض، كما صممت دراسة Minshew et al. (2021) برنامج قائم على التلمذة المعرفية لتعزيز التنشئة الإجتماعية، والنجاح الأكاديمي، وانتاجية البحث لدى طلاب الدراسات العليا خريجي مدارس STEM، وأكدت نتائج الدراسة على أهمية مجتمع الممارسة؛ حيث أن المجتمع الذي يوجد فيه المتعلم قد يكون له تأثير كبير عليه، بالإضافة إلى أن المجتمع يلعب دورًا مهمًا في إكمال المسيرة التعليمية، فمن المرجح أن يكمل طلاب الدراسات العليا الذين يحققون اندماجًا مجتمعيًا دراستهم أكثر من أولئك الذين لا يندمجون بشكل كامل في المجتمع، وأعدت دراسة الحنان (٢٠٢١) برنامج قائم على التلمذة المعرفية في تدريس الرياضيات لتنمية التنور الرياضي وخفض التجول العقلي لدى تلاميذ الصف الخامس الإبتدائي، وتوصلت الدراسة إلى فاعلية البرنامج القائم على التلمذة المعرفية، ودراسة العييد (٢٠٢١) هدفت إلى قياس أثر توظيف أنموذج التلمذة المعرفية في بيئات التعلم الإلكتروني في تحسين كفاءة التعلم وخفض التجول العقلي لدى طالبات الجامعة، وكشفت النتائج عن وجود أثر دال إحصائيًا للبرنامج المقترح لتوظيف أنموذج التلمذة المعرفية في بيئات التعلم الإلكتروني في تحسين كفاءة التعلم وخفض التجول العقلي لدى الطالبات، ودراسة Pristel et al. (2022) استخدمت نموذج التلمذة المعرفية لتنمية التفكير الناقد لدى طلاب الصف السابع في مدارس STEM ، وأثبتت نتائج الدراسة أن نموذج التلمذة المعرفية قد عزز مهارات التفكير النقدي لدى الطلاب، أما دراسة Pinto and Zvacek (2022) فقد هدفت إلى الكشف عن وجهات نظر طلاب الماجستير في كلية الهندسة بجامعة بورتو بالبرتغال حول استخدام نموذج التلمذة المعرفية في تدريس وحدة ميكانيكا الموائع الحسابية، وكانت جميع آراء الطلاب بشكل عام إيجابية حول استخدام نموذج التلمذة المعرفية في التدريس، كما أثبتت دراسة annion and Brown (2022) فاعلية استخدام نموذج التلمذة المعرفية في تدريب أمناء المكتبات على العمل في هذه المهنة، وتزويدهم بالمهارات والكفاءات المهنية المطلوبة للعمل في السياق المهني لهذه المهنة، وصممت دراسة Lo and Tsai (2022) تصميم تعليمي مقترح في الرياضيات قائم على التكامل بين التلمذة المعرفية والتعلم المتنقل (التعلم من خلال الهاتف

المحمول) لقياس مدى رضا الطلاب عن تعلم الرياضيات، وأشارت نتائج الدراسة إلى وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في مقياس رضا الطلاب عن تعلم الرياضيات، ومقياس الرضا عن استخدام تكنولوجيا المعلومات في التدريس لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية.

بالنظر إلى الدراسات السابقة، نستخلص الأثر الإيجابي والفعال لاستخدام نموذج التلمذة المعرفية وتوظيفه في التدريس بصفه عامة وتدريس الرياضيات بصفه خاصة على تنمية العديد من المتغيرات المعرفية في الرياضيات مثل تنمية التحصيل في الرياضيات، والقدرة على حل المشكلات الرياضية، والقدرة على النمذجة الرياضية، وتنمية مهارات التفكير الرياضي والجانبي، والتفكير الإستدلالي، والناقد، والتواصل والتنور الرياضي، بالإضافة إلى تنمية العديد من الجوانب الوجدانية لدى المتعلمين مثل تنمية الدافعية للتعلم، والنزعة الرياضية المنتجة، وخفض قلق الرياضيات، وخفض التجول العقلي، والنجاح الأكاديمي، والكفاءة التعليمية، ومدى رضا الطلاب عن تعلم الرياضيات.

وعلى الرغم من أن التلمذة المعرفية قد تم تطويرها في الأساس من أجل التدريس بشكل أساسي في مراحل التعليم من رياض الأطفال وحتى التعليم الثانوى، إلا أننا نجد أنه تم استخدام التلمذة المعرفية بشكل متزايد في المرحلة الجامعية، ومرحلة الدرسات العليا، ولدى الخرجين، ومع طلاب مدارس STEM، وفي مجال التدريب؛ مما يدل على نجاح وفعالية نموذج التلمذة المعرفية في التعليم والتعلم.

الفرق بين التلمذة التقليدية، والتلمذة المعرفية:

هناك ثلاث أساليب للتلمذة التقليدية وهي: النمذجة، والتدريب، والسقالات؛ ففي النمذجة يشاهد المتعلم كيف يؤدي المعلم المهمة ويلاحظه، وفي التدريب فإن المعلم يراقب المتعلم أثناء تأدية مجموعة من الأنشطة والمهام، مع تقديم التلميحات، والتحفيز والتشجيع، وفي السقالات يقدم المعلم الدعم والمساعدة للمتعلمين على أداء المهمة، ثم يتم إزالة الدعم ببطء، واعطاء المتدرب المزيد من المسؤولية؛ حتى يتمكن من العمل بشكل مستقل (Matsuo & Tsukube, 2020,1) ؛ (Johnson-Laghi, & Mattar, 2022, 365).

في ضوء ذلك تختلف التلمذة المعرفية عن التلمذة التقليدية في مدى تعميم المعرفة واستخدامها في بيئات مختلفة، وعلى نطاق واسع في سياقات متنوعة (Collins, et al.,2006, 49)

حيث يذكر Butler et al. (2019, 931) أن التلمذة المعرفية تختلف عن التلمذة التقليدية في أن المتعلم يلاحظ ويساعد المعلم في تنفيذ المهام التعليمية، ثم يتعلم بعد ذلك المهارات اللازمة لإكمال المهمة التعليمية من تلقاء نفسه أثناء تعميم المعرفة التي تعلمها من المعلم في سياقات آخرى، بعكس التلمذة التقليدية التي يكتفى فيها المتعلم بملاحظة المعلم في تنفيذ المهام التعليمية، ثم التدريب على تنفيذ مهام تعليمية مشابهه دون تعلم اى مهارات آخرى.

ويذكر الجندي (٢٠٢٠، ٩٦) أنه في التلمذة التقليدية تكون المهارات التي يحتاج التلميذ إلى تعلمها ملازمة للمهمات التعليمية، أما في التلمذة المعرفية يتعلم التلميذ المهارات من خلال تطبيقها بالحياة اليومية.

حيث أن مصدر قوة التلمذة المعرفية يأتي من خلال السياق الاجتماعي الذي تتم من خلاله؛ فالتلمذة المعرفية نموذج يدمج التعلم في الأنشطة، ويستخدم بشكل أساسي ومتعمد السياق المادي والإجتماعي من خلال إعطاء المتعلم مهمات تمثل مواقف متنوعة يطبق عليها معرفته ومهاراته (الزهراني، وأبو رحمة، ٢٠١٩، ٥١٥)، أما التلمذة التقليدية فهى تركزعلى حل المشكلات بمعزل عن غيرها (Johnson–Laghi, & Mattar, 2022, 364)

لذا يؤكد كل من Matsuo and Tsukube, (2020,3) أن التلمذة المعرفية تختلف عن التلمذة التقليدية في تزويد المتعلمين بفرص أكبر لاستيعاب التعلم وتطوير مهارات المراقبة الذاتية لديهم، من خلال توسيع وتعميم نطاق التعلم إلى بيئات مختلفة.

وأثناء حل المشكلات في الرياضيات بإستخدام التلمذة التقليدية فإن المتعلم يعتمد على معرفته بالأنماط القياسية لحل المشكلات كما هى معروضة في الكتاب المدرسي، أما بإستخدام التلمذة المعرفية يهتم المتعلم بمعرفته باستراتيجيات حل المشكلات والخصائص الجوهرية للمشكلة نفسها (Collins, et.al,1991).

ومن أجل ترجمة نموذج التلمذة التقليدية إلى نموذج التلمذة المعرفية؛ يحتاج المعلمون إلى: (Collins, et.al,1991) ؛ (Kirschner & Hendrick, 2020, 39)

- **تحديد عمليات المهمة وجعلها مرئية للطلاب.**
- **وضع المهام المجردة في سياقات حقيقية أصيلة؛ بحيث يفهم الطلاب أهمية العمل.**
- **تنوع المواقف المختلفة، وتوضيح الجوانب والأمور المشتركة؛ حتى يتمكن الطلاب من نقل ما تعلموه، حيث أن البيئة الاجتماعية جانبًا مهمًا من جوانب التلمذة المعرفية.**

من خلال ما سبق نستخلص أن:

- **التلمذة المعرفية مبنية على التلمذة التقليدية؛ فهى تُعد تطورًا للتلمذة التقليدية؛ فهى ترتقي بالتلمذة التقليدية إلى مستوى أعلى، حيث تستهدف تعميم المعارف والمهارات في سياقات متنوعة وتطبيقها في مواقف جديدة؛ لذا فهي تؤكد على مشاركة المتعلمين النشطة في سياق التعلم الواقعي، وتوظيف المعارف في حل المشكلات الواقعية.**
- **الهدف من التلمذة التقليدية هو تعلم الخطوات الإجرائية لأداء المهمة المحددة، بينما التلمذة المعرفية لا تكتفي بذلك وإنما تؤكد على كيفية استخدام الإستراتيجيات لتأدية المهمات.**
- **التلمذة المعرفية تركز على العمليات والمهارات المعرفية وما وراء المعرفية، بينما إقتصرت التلمذة التقليدية على العمليات والمهارات المعرفية.**

أبعاد بيئة التعلم القائمة على التلمذة المعرفية:

تشتمل بيئة التعلم القائمة على التلمذة المعرفية على أربعة أبعاد مترابطه؛ هى التي تدعم عمل الخبراء، وتساهم في جعل عمليات التفكير مرئية وواضحة للطلاب وللمعلمين، وهى كالأتي:(Minshew et al, Kirschner & Hendrick, 2020, 40) ؛ 2021, 3

١- المحتوى: وهو يشير إلى الأنواع المختلفة من المعرفة واستراتيجيات التفكير المطلوبة للخبرة؛ والتي تمنح المتعلمين أساسًا متينًا للتعلم.

٢- الطرق: وهى تشير إلى استراتيجيات التدريس التي تعزز تطوير الخبرة.

٣- التسلسل: يشرح الترتيب المدروس لتنظيم التعلم في مراحل، وتنظيم تقديم الأنشطة، والتدرج في التعلم؛ لتعزيز الخبرة.

٤- المجتمع: يجب تجسيد المواقف الحقيقية في بيئة التعلم؛ لخلق مجتمع تعليمي تعاوني يعزز المشاركة المجتمعية، ويقوم على التعلم الواقعي حيث يتعلم الطلاب في سياق العمل على مهام واقعية.

دور المعلم في التدريس بالتلمذة المعرفية:

دور المعلم في بيئة التلمذة المعرفية يظهر من خلال ترتيب أنشطة التعلم، وتغيير دوره إلى أنموذج ومدرب ومراقب لعملية التعلم من خلال النمذجة والتوضيح والتدريب والتسقيل؛ حيث يقوم المعلم بالأدوار التالية أثناء التدريس بإستخدام التلمذة المعرفية: (الزهراني، وأبو رحمة، ٢٠١٩، ٥١٠ ؛ الحنان، ٢٠٢١، ١٧٠)

١- نمذجة العمليات المعرفية؛ عن طريق قيام المعلم الخبير بعرض العمليات والإستراتيجيات الازمة لتنفيذ المهمة.

٢- التكامل بين العرض والتوضيح أثناء التدريس؛ فالمتعلم بحاجة إلى التوضيح أثناء ملاحظته للأداء المنمذج.

٣- ملاحظة أداء المتعلمين ومدى تمكنهم من العمليات المعرفية.

٤- تقديم الدعم والمساعدة للمتعلمين، وتزويدهم بالتلميحات والمساعدة وقت الحاجة.

٥- تقديم المهام والأنشطة الصفية، وتنوع الأمثلة وسياقات الممارسة.

دور المتعلم في التعلم بالتلمذة المعرفية:

يقوم المتعلم بالأدوار التالية أثناء التعلم بالتلمذة المعرفية: (المشهداني، والشمري ٢٠١٧، ٨٠)

١- يلاحظ المعلم الخبير أثناء التطبيق العملي للمهمة التعليمية.

٢- يسجل جميع الملاحظات والنتائج التي يحصل عبيها أثناء الملاحظة.

٣- يشارك بفاعلية في العملية التعليمية، ويتحمل مسئولية تعلمه من خلال تنفيذ الأنشطة والمهام التعليمية تحت توجية المعلم.

٤- تشخيص الصعوبات التي تواجهه أثناء قيامه بحل المشكلات لتعديل أدائه تدريجيًا؛ عن طريق تحليل أدائه، ومقارنة عملياته لحل المشكلات بتلك التي يمتلكها الخبير، بالإضافة إلى مقارنة إنجازاته مع زملائه؛ لمعرفة كيف يمكنه تحسين عمله فيما بعد.

٥- يطبق ويعمم النتائج التي حصل عليها في مواقف تعليمية جديدة.

المحور الثاني: نموذج ويتلي (Wheatley Model) **:**

سمي نموذج ويتلي بهذا الإسم نسبة إلى العالم الأمريكي جريسون ويتلي **Grayson Wheatley** الذي صممه ووضع إجراءاته، وهو نموذج تعليمي تم تصميمه لتدريس الرياضيات والعلوم، قائم على النظرية البنائية التي تدعوا إلى أن يكون المتعلم هو محور العملية التعليمية، وأن يتمكن من تحقيق فهم ذي معنى من خلال تفاعله مع المهام والمشكلات الحقيقية المطروحه.

وفي البداية تم استخدام هذا النموذج في المدارس الإبتدائية لتدريس الرياضيات، وقد أطلق على منهج الرياضيات في ذلك الوقت اسم الرياضيات المتمركزة حول المشكلات، إلا أن تم التوسع في استخدامه بعد ذلك في كل المراحل الدراسية في أوائل التسعينات، وأطلق عليه نموذج التعلم المتمركز حول المشكلة "**problem-centered learning model**" (**Rinaldi & Afriansyah, 2019, 11**).

مفهوم نموذج ويتلي:

أشارت الدراسات السابقة إلى عدة تعريفات لنموذج ويتلي، يمكن عرض بعضها على النحو التالي:

تعريف كل من سيفين (٢٠١٥، ٩٣)، وعودة (٢٠١٨، ١٨) لنموذج ويتلي بأنه: تتابع منظم من الإجراءات والخطوات التي تبدأ بطرح المعلم للموضوع الرياضي في صورة مشكلات واقعية ويبدأ المتعلمين بالتفكير فيها والبحث عن حلول لها عن طريق ممارسة أنشطة من خلال مجموعات صغيرة متعاونة وتنتهي بمشاركة المجموعات كلها في مناقشة وتقويم ما تم التوصل إليه.

وعرفه **Yew et al, (2016, 76)** بأنه: نموذج تعليمي يمنح المتعلمين فرصة حل مشكلات ومواقف تعلم حقيقية في بيئة تعلم تعاونية.

بينما عرفه الحربي (٢٠١٧، ١٠) بأنه: نموذج تدريسي يمر بثلاث مراحل هي: المهام والمجموعات المتعاونة والمشاركة، بحيث يقدم المعلم المهام على صورة مشكلات ويبدأ الطلاب بالتفكير في حلها والمناقشة عن طريق مجموعات صغيرة، ثم تنتهي بمشاركة المجموعات كلها في مناقشة وتقويم ما توصل إليه تحت إشراف المعلم.

كما عرفه حافظ وآخرون (٢٠٢٠، ٤٢١) بأنه: "نموذج تعليمي يتعلم فيه التلاميذ من خلال محاولة حل مشكلة رياضية مفتوحة النهاية يطرحها المعلم، ويتشارك التلاميذ في مجموعاتهم لحل المشكلة، ثم تتشارك مجموعات التلاميذ لمناقشة حلولهم؛ حيث يقدم التلاميذ حلولهم إلى الفصل للنظر فيها، وأثناء مناقشة الفصل تتم عملية التدقيق في صحة الحلول ويقدم المعلم التغذية الراجعة".

وعرفة كل من Shobirin et al, (2021, 101) ، Gusnur (2021, 26) بأنه نموذج للتعلم يستهدف مواجهة المتعلم بمشكلات واقعية من العالم الحقيقي الذي يعيش فيه، ثم التركيز على البحث واكتشاف الأخطاء وإصلاحها.

بينما عرفه Adnan (2021, 227) بأنه نهج قائم على حل المشكلات لتعليم الرياضيات، ومتمركز حول المتعلم، حيث يسمح للمتعلمين بالمشاركة في عملية التعلم من خلال القيام بالعديد من المهام التعليمية.

ويعرف Yulianti et al. (2022, 2) نموذج ويتلى بأنه: نموذج تعليمي يركز على طرح المشكلات الرياضية، وإتاحة الفرصة أمام المتعلمين لإجراء المفاوضات من خلال أنشطة التعلم الجماعية التي يشترك فيها المجموعات ثم الفصل بأكملة؛ للوصول إلى حل للمشكلات الرياضية المطروحة.

بإستقراء التعريفات السابقة نستخلص أن جميعها أكدت على ضرورة دمج المتعلم في عملية التعلم؛ لبناء المعرفة بنفسه، فالمعرفة تتولد لدى المتعلم من خلال نشاطه الذاتي، وتفاعله النشط مع المشكلات الحقيقية التي تقدم له؛ وفي ضوء ذلك يعرف البحث الحالي نموذج ويتلي اجرائيًا بأنه: نموذج بنائي تعليمي يعتمد على مرور المتعلم بمواقف ومشكلات واقعية، ويتطلب منه المواجهة والتفكير في ايجاد الحلول لهذه المشكلات والمواقف مستخدمًا عمليات البحث والإستقصاء والتفكير المنطقي من خلال ربط المعرفة السابقة ودمجها مع

المعرفة الحالية، والمشاركة بتبادل الأفكار والآراء في مجموعات صغيرة، ثم مشاركة جميع المتعلمين في الفصل؛ للوصول إلى حل للمشكلة المطروحة.

المبادئ الأساسية لنموذج ويتلي:

يشير كل من (Ali (2019, 76 ، وحماد، (٢٠١٨، ١٥) إلى أن نموذج ويتلي يستند إلى المبادئ التالية:

- **المشكلات التي تقدم للتلاميذ في صورة مهام تعليمية ومشكلات حقيقية هى المحور الأساسي في عملية التعلم.**
- **مسئولية البحث عن الحلول للمشكلات المطروحة تقع على عاتق المتعلم تحت إشراف وتوجيه المعلم؛ فالطلاب مسؤولون عن تعلمهم وتعلم كيفية القيام بذلك.**
- **يتطلب حل المشكلات من المتعلمين تفكيرًا وجهدًا، كما تحث المشكلات الجديدة المتعلمين على التفكير العميق؛ للوصول إلى القرارات البناءه.**
- **يجب أن يكون لدى المتعلمين بعض المعرفة الأساسية والافتراضات والخبرات السابقة.**
- **يركز النموذج على عملية حل المشكلة وليس حل المشكلة.**
- **الهدف من وراء تصميم الأنشطة والمهام التعليمية ليس الوصول فقط إلى إجابات صحيحة بل أيضًا وصف هذه الحلول واستخدام استراتيجيات التفكير في الوصول إليها واعطاء دليل رياضي على معقولية الحل.**
- **يستخدم المتعلم طرق التفكير المختلفة، ومهارات التفكير العليا أثناء آداء المهام التعليمية.**
- **يركز النموذج على استخدام وتطبيق المتعلم لما تم تعلمه في مواقف الحياة الاجتماعية.**
- **التعاون هو السمة الرئيسية في هذا النوع من التعلم؛ فيحدث التعلم في بيئة تعاونية وفي سياق اجتماعي.**

مزايا نموذج ويتلي:

يُعد نموذج ويتلى من النماذج البنائية الهامة الذي يتميز بالعديد من المزايا الهامة منها:

- **نموذج ويتلي يجعل التعليم في المدرسة أكثر صلة بالحياة وخاصة مجال العمل؛ فهو يحفز قدرات المتعلمين على التعامل مع المشكلات بمهارة، وعلى التفكير الإبداعي الشامل (Gusnur, 2021, 28) .**

- **يعزز نموذج ويتلي قدرة المتعلمين على التفكير النقدي وحل المشكلات، كما ينمي المتعلم ذاتيًا، وينمي عادات العقل لديه من خلال ممارسة أنواع التفكير المختلفة في مواقف تعلم حقيقية (Yew et al, 2016, 76).**
- **في نموذج ويتلي يتم إشراك المتعلمين في مجموعات صغيرة متعاونة ثم في المناقشات الصفية؛ مما يتيح أمامهم فرص متكررة لمناقشة، وشرح، ونقد، وتبرير، وتفسير أفكارهم وحلولهم المطروحة(Cobb et al, 1991, 6).**
- **نموذج ويتلي يساعد المتعلم على صناعة القرارات، وعلى استخدام أساليبهم البحثية الخاصة وتوظيف العمليات والمهارات المعرفية في التعامل مع المشكلات المتضمنة في مهمة التعلم (حسن، ٢٠٢١، ١٥١٦).**
- **يدرب نموذج ويتلي المتعلمين على الثقة بالنفس والتحدث والتعبير عن الحجج والآراء أثناء التحدث أمام الفصل لعرض النتائج في مرحلة المشاركة ,Apriliana et al (2019, 129).**
- **ينمي النموذج مفهوم التعلم الذاتي لدى المتعلم؛ من خلال قيامه بالبحث في المصادر التعليمية المختلفة، وتبادل الآراء والأفكار، واحترام وجهات نظر الآخرين وتقبلها، كما ينمي ثقة المتعلم بنفسه؛ من خلال احساسه بقدرته على التفكير والنقاش وطرح الأفكار والتعبير عن رأيه وتطبيق ما تعلمه في مواقف مختلفة (الشوحة، ٢٠٢٠، ١٥).**
- **نموذج ويتلي يعزز التدريس الفعال القائم على الأدلة؛ من خلال تنمية مهارات البحث، والتفاوض، والعمل الجماعي، والكتابة اللفظية، والاحتفاظ بالمعرفة بشكل أفضل لدى المتعلمين (Allen et al, 2011, 22)**
- **هو نموذج قادر على مساعدة المتعلم على التفكير بشكل خلاق ونقدي وتقدير نظرة ثاقبة في المشكلات القائمة في الحياة اليومية (Shobirin et al, 2021, 101).**
- **يتحول المتعلم فيه من مستمع سلبي إلى متعلم ذاتي، يستطيع تعلم معارف ومهارات جديدة من خلال قيامة بحل المشكلات مع زملائه، واكتسابه لمهارات حل المشكلات ومهارات العمل الجماعي (حافظ وآخرون، ٢٠٢٠، ٤٢٦).**

- **نموذج ويتلي لا يساعد فقط على فهم المحتوى المطلوب تعلمه، بل يمكن المتعلم من بناء معنى للمحتوى، ويقوده إلى التفكير حول المشكلات الجديدة وتكوين هذه المشكلات؛ مما ينمي لديه القدرات الإبداعية (حسن، ٢٠٢١، ١٤٩٢).**
- **يتيح النموذج للمتعلمين الفرصة للقيان بأنشطة تعلم مختلفة لبناء المفاهيم والأفكار الرياضية واكتساب المعرفة من خلال البحث وممارسة عمليات التفكير المختلفة والتواصل الرياضي بين المتعلمين بعضهم البعض (Yulianti et al, 2022, 5).**

ويضيف البحث الحالي المميزات التالية:

- **ينمي نموذج ويتلي الكثير من المهارات الاجتماعية لدى المتعلم مثل القدرة على التواصل مع الآخرين، واحترام الرآى الأخر، وامتلاك مهارات العمل الجماعي مع تحمل المسئولية الفردية داخل المجموعة.**
- **يزيد من بقاء أثر التعلم، وزيادة الدافعية للتعلم لدى المتعلمين؛ نتيجة تعاملهم مع مشكلات حياتية واقعية ذات معنى بالنسبة لهم.**
- **يوفر النموذج بيئة تعليمية تعاونية آمنه خالية من الخوف، تساعد المتعلم على تنظيم وتطوير أفكاره.**
- **يحقق متعة التعلم أثناء القيام بالمهام التعليمية في مجموعات متعاونة.**

وتأكيدًا على أهمية نموذج ويتلي في تدريس وتعليم الرياضيات، فقد استخدمت العديد من الدراسات في مجال تربويات الرياضيات نموذج ويتلي في التدريس في كافة المراحل التعليمية لتنمية العديد من المتغيرات التابعة، وتحقيق العديد من الأهداف التعليمية، ومنها دراسة Cobb et al. (1991) التي قامت بمشروع لمدة عام كامل لتقييم استخدام نموذج التعلم المتمركز حول المشكلة البنائي (ويتلي) في تدريس الرياضيات لتنمية الكفاءة الحسابية والتطور المفاهيمي للمتعلمين ومعتقداتهم ودوافعهم حول الرياضيات، وشارك في الدراسة عشرة فصول للصف الثاني الإبتدائي، توصلت الدراسة إلى الأثر الفعال لنموذج التعلم المتمركز حول المشكلة في تدريس الرياضيات، ودراسة Imamah (2014) التي استخدمت نموذج ويتلي وأثبتت فاعلية في تنمية التحصيل وتحسين نواتج التعلم في مادة الجبر لدى طلاب الصف السابع، وكشفت دراسة سيفين (٢٠١٥) عن مدى فاعلية استخدام إستراتيجية " ويتلي" للتعلم المتمركز حول المشكلة في تنمية التفكير التأملي والقدرة على حل المعادلات

والمتباينات الجبرية والاتجاه نحوها لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، وفي ضوء نتائج الدراسة التي أثبتت فاعلية استراتيجية ويتلي، أوصى الباحث بضرورة تدريب المعلمين على استخدامها في تدريس الرياضيات، واستخدمت دراسة الحربى (٢٠١٧) نموذج ويتلى فى تنمية التحصيل الدراسى بمقرر الرياضيات للصف الثاني المتوسط، وتوصلت نتائج الدراسة إلى أن نموذج ويتلي يحقق مستوى مناسبًا من الفاعلية في تنمية التحصيل في مادة الرياضيات، بينما استخدمت دراسة كل من حسن، والريس (٢٠١٨) استراتيجية قائمة على نموذج "ويتلى" لتنمية مهارات تحليل محتوى الرياضيات المدرسية وتنمية الاتجاه نحو تعليم الرياضيات للطلاب المعلمين بكلية التربية شعبتي التعليم العام والابتدائي، وجاءت النتائج لتثبت فاعلية الاستراتيجية المقترحة، ودراسة عودة (٢٠١٨) التي هدفت إلى قياس أثر استخدام نموذج ويتلي في تحصيل تلاميذ الصف الخامس الابتدائي في مادة الرياضيات، وأظهرت النتائج وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين درجات المجموعة التجريبية وبين درجات المجموعة الضابطة لصالح المجموعة التجريبية، بينما استخدمت دراسة حماده (٢٠١٨) نموذج ويتلي في اكتساب المفاهيم الهندسية والدافعية نحو تعلم الهندسة لدى طلبة الصف العاشر الأساسي، ودراسة كل من Rinaldi and Afriansyah (2019, 11) التي هدفت إلى معرفة تأثير كل من نموذج التعلم المتمركز حول المشكلة (ويتلي)، ونموذج حل المشكلات على تحسين قدرات الطلاب على حل المشكلات الرياضية، وتم التوصل إلى أن نموذجي التعلم لهما تأثير إيجابي على تعلم الرياضيات وعلى اتجاهات الطلاب نحو تعلم الرياضيات، ولكن القدرة على حل المشكلات لدى الطلاب الذين درسوا باستخدام نموذج التعلم المتمركز حول المشكلات كانت أفضل من قدرة الطلاب الذين درسوا باستخدام نموذج حل المشكلات، بالإضافة إلى دراسة Apriliana et al. (2019) التي استخدمت نموذج ويتلي لتنمية التفكير الناقد في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، وأشارت نتائج الدراسة إلى وجود تأثير لنهج التعلم المتمحور حول المشكلة على قدرة الطلاب على التفكير النقدي الرياضي، ودراسة مطر (٢٠١٩) التي هدفت إلى قياس أثر توظيف نموذج ويتلي المعدل على تنمية مهارات التفكير الإبداعي والاتجاه نحو الرياضيات لدى طالبات الصف الرابع الأساسي، وأشارت نتائج الدراسة إلى الدور الفعال لنموذج ويتلي في جذب انتباه المتعلمين وإثارة تفكيرهم؛ لذا أوصت بتوظيف النموذج في تعلم الرياضيات لجميع المراحل

الدراسية، واهتمت دراسة الشوحة (٢٠٢٠) باستخدام نموذج ويتلي لتنمية التحصيل الدراسي في مادة الرياضيات والاتجاه نحوها لدى طلاب الصف الخامس الأساسي، كما استخدمت دراسة حافظ، وآخرون (٢٠٢٠) نموذج ويتلي في تدريس الرياضيات لتنمية بعض مهارات الحس العددي لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي وأسفرت نتائج البحث عن وجود فرق دال احصائيا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في القياس البعدي لاختبار الحس العددي لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية؛ مما يدل على الأثر الكبير لنموذج ويتلي على تنمية بعض مهارات الحس العددي لدى التلاميذ، ودراسة Adnan (2021) التي استخدمت نموذج ويتلي لزيادة قدرة طلاب المرحلة الثانوية على التفكير الإبداعي في الرياضيات من خلال حل المشكلات غير الروتينية وغير النمطية، وأظهرت النتائج أن هناك زيادة في قدرة الطلاب على التفكير الإبداعي في الرياضيات نتيجة استخدام نموذج التعلم المستند إلى المشكلة، أما دراسة Shobirin et al, (2021) فقد هدفت إلى قياس أثر استخدام نموذج التعلم القائم على المشكلات على ممارسة الأنشطة التعليمية وعلى نواتج التعلم لدى طلاب المرحلة الثانوية، وأظهرت النتائج أن تطبيق النموذج له أثر إيجابي على نشاط الطلاب أثناء عملية التعلم، كما أثر على نواتج التعلم من خلال تحسين مهارات التفكير النقدي والإبداعي والمنطقي بشكل جيد لدى الطلاب، وهدفت دراسة بني ملحم، وآخرون (٢٠٢١) إلى تقصي فاعلية نموذج ويتلي للتعلم المتمركز حول المشكلة في اكتساب المفاهيم الرياضية في وحدة الأعداد الصحيحة في مقرر الرياضيات لتلاميذ الصف السادس الإبتدائي، وفي ضوء النتائج أوصت الدراسة ضرورة تدريب نعلمي الرياضيات في المراحل التعليمية المختلفة على هذا النموذج لما له من فاعلية كبيرة في تنمية واكتساب المفاهيم الرياضية، كما هدفت دراسة Gusnur (2021) إلى تحديد الفاعلية النسبية لاستخدام نموذجي حل المشكلات الإبداعي والتعلم المتمركز حول المشكلة لتنمية مهارات التفكير العليا والمثابرة والاستمرار في تعلم مادة الرياضيات، وكشفت نتائج الدراسة أن تطبيق نموذجي حل المشكلات الإبداعي والتعلم المتمركز حول المشكلة فعال في تحسين القدرة على التفكير الإبداعي الرياضي لدى الطلاب وفي تنمية مهارات التفكير العليا واستمرار تعلم الطلاب لمادة الرياضيات، وأعدت دراسة حسن (٢٠٢١) برنامج تدريبي مقترح لدى معلمي الرياضيات لذوي الاحتياجات الخاصة قائم على التفاعل بين إطار "TPACK" " ونموذج ويتلي لتنمية

التفكير التحليلي وجدارات التدريس، وكانت من أهم نتائج البحث فاعلية البرنامج المقترح في تنمية مهارات التفكير التحليلي وجدارات التدريس بجانبيها المعرفي والأدائي لدى معلمي المجموعة التجريبية، وهدفت دراسة Yulianti, et al. (2022) إلى قياس أثر استخدام نموذج ويتلي (التعلم المتمركز حول المشكلة) بمساعدة الوسائط التكنولوجية المسموعة والمرئية على تنمية قدرة الطلاب على التواصل الرياضي شفهيًا وكتابيًا، وأشارت نتائج الدراسة أن نموذج التعلم المتمركز على المشكلة له تأثير كبير على قدرة الطلاب على التواصل في تعلم الرياضيات.

من خلال العرض السابق للدراسات السابقة يتضح أن استخدام نموذج ويتلي في تدريس الرياضيات يزيد من كفاءة العملية التدريسية، ويحقق الكثير من الأهداف التربوية المرغوبة للعملية التعليمية، كما أنه يصلح للاستخدام في جميع المراحل التعليمية؛ حيث اتفقت الدراسات على أهمية استخدامه في مراحل التعليم المختلفة، وفي حدود علم الباحثتين لا توجد أى دراسة حاولت الدمج بينه وبين نموذج التلمذة المعرفية في تدريس مادة الرياضيات؛ لإعداد استراتيجية مقترحة قائمة على النموذجين، كما أنه لم يتم الوقوف على أثر استخدام نموذج ويتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة في الرياضيات والفهم العميق للرياضيات.

وقد ساعد الإطلاع على تلك الدراسات السابقة في معرفة آلية توظيف نموذج ويتلي في التدريس، وفي كيفية إعداد المهام التعليمية بشكل سليم، وتحديد دور كل من المعلم والمتعلم في كل مرحلة من مراحل النموذج، وتفسير نتائج البحث الحالي في ضوء ما توصلت إلية الدراسات السابقة.

مراحل نموذج ويتلي:

بإستقراء الدراسات التربوية السابقة تم تحديد المراحل التالية التي يتبعها المعلم أثناء التدريس باستخدام نموذج ويتلي:

١. مرحلة المهام التعليمية Learning Tasks : وهى المرحلة الأساسية في مراحل نموذج ويتلي، ففي هذه المرحلة يتم طرح مهام التعلم، والتي تتمثل في مجموعة من المشكلات، ثم حث المتعلمين على التفكير والبحث والاستقصاء من أجل وضع الافتراضات والحلول المتعددة للمهمة (Shobirin et al, 2021, 101) .

ونجاح هذه المرحلة يعتمد على دقة المعلم في اختيار المشكلة أو المهمة، حيث يذكر Ali (2019, 75) أن نجاح نموذج ويتلي يتوقف على هذه المرحلة؛ من خلال الإختيار الدقيق للمهام التعليمية المناسبة للهدف الموضوعة لأجله، وهذا يتطلب دقة وتركيز كبير عند اختيارها وعند صياغتها من قبل المعلمين.

لذا يجب مراعاة توافر الشروط التالية في المهام المطروحة: (حسن، والريس، ٢٠١٨، ٤٤ ؛ عودة، ٢٠١٨، ١٩)

- أن تمثل المهام مشكلات حقيقية من واقع حياة المتعلم وذات معنى له، ووثيقة الصلة بخبراته السابقة، ومرتبطة بإهتماماته.
- أن تكون مناسبة للمتعلم من حيث المحتوى المعرفي.
- تصمم المشكلات بطريقة تسمح بالبحث والتحري والتقصي.
- أن تشجع المهام المتعلمين على التفاعل والحوار والمناقشة وطرح الأسئلة.
- أن يمثل البحث فيها متعة معرفية وإثارة عقلية للمتعلم.
- أن تكون لها أكثر من طريقة للحل، وأكثر من إجابة صحيحة، وتحث المتعلمين على صنع القرارات.

٢. مرحلة المجموعات المتعاونة Cooperative Groups : يتم في هذه المرحلة تقسيم المتعلمين إلى أزواج أو مجموعات تعلم تعاوني صغيرة، تعمل معًا وتتبادل الآراء والأفكار فيما بينهم حول المهمة؛ للتوصل إلى إتفاق حول حل المشكلة المطروحة (Rinaldi & Afriansyah, 2019, 11).

ويكون دور المعلم في هذه المرحلة ميسر للعملية التعليمية، ومشجع للمتعلمين على الإنخراط في الحوار التشاركي وفي طرح الأفكار والتعبير عن آرائهم، ولا يقوم هو بتقديم أي آراء أو مقترحات حول الأفكار المطروحة لحل المشكلة (مطر، ٢٠١٩، ١٨).

كما تذكر دراسة Cobb et al. (1991, 7) أن دور المعلم في مرحلة المجموعات المتعاونة أثناء تدريس الرياضيات بإستخدام نموذج ويتلي، يتمثل في تطوير العلاقات التعاونية المنتجة بين المتعلمين، وتسهيل الحوار الرياضي بينهم؛ حيث تهدف هذه المرحلة إلى إعطاء الفرصة لكل متعلم للمناقشة والتعبير عن رآيه داخل مجموعته.

٣. مرحلة المشاركة Sharing : وهى المرحلة الأخيرة من مراحل التدريس بإستخدام نموذج ويتلي، يتم فيها مشاركة المجموعات بعضها البعض في مناقشة ما تم التوصل إليه، من خلال إتاحة الفرصة والوقت الكافي لكل مجموعة لعرض ما تم انجازة في مرحلة المجموعات المتعاونة، وتقديم حلولهم وأفكارهم، وقد يحدث خلاف بين المجموعات حول الأفكار والحلول المطروحة، لذلك تدور المناقشات؛ للوصول لنوع من الاتفاق فيما بينهم وايجاد حل مناسب في النهاية للمشكلة المطروحة (Rinaldi & Afriansyah, 2019, 11).

وتتمثل فائدة هذه المرحلة في جعل المتعلمين في اتصال وتعاون حقيقي فيما بينهم، وتوفير فرص حقيقية لكل مجموعة إلى الإستماع إلى آفكار وآراء أخرى مختلفة وتفسيرات للمشكلة المطروحة (Apriliana et al, 2019, 129).

ويكون دور المعلم في هذه المرحلة هو إدارة التفاعل والنقاش والحوار بين المتعلمين، فهو ميسر وداعم لتعلم الطلاب (Yew et al, 2016, 76).

دور المعلم في ضوء نموذج ويتلي:

في ضوء ما تم عرضه يرى البحث الحالي أنه لكي ينجح المعلم في استخدام نموذج ويتلي في تدريس مادة الرياضيات يجب ان يقوم بالآتي:

- تهيئة البيئة الصفية الهادفه التي تتمركز حول المتعلم، والتي تتسم بالمرونة، والديمقراطية، والمناسبة للعمل التعاوني، ومراعاة الفروق الفردية بين المتعلمين.
- طرح المشكلات والمهام التي تثير اهتمام المتعلمين.
- إثارة الدافعية لدى المتعلمين نحو تحقيق تعلم قائم على بناء المعنى والفهم.
- مراقبة عمل المجموعات أثناء العمل في مرحلتي المجموعات المتعاونة والمشاركة، وتقديم التوجيه والإرشاد، وحثهم على تبني استراتيجيات تفكير مختلفة، وتوظيف مهارات التفكير العليا أثناء حل المشكلات.

دور المتعلم في ضوء نموذج ويتلي:

دور المتعلم يظهر بشكل واضح في المراحل الثلاث للنموذج، كما يلي:

- في مرحلة المهام، يقوم المتعلم بمحاولة فهم المهمة المطروحة من خلال تحديد المطلوب وطرح الأسئلة والبحث في المصادر المختلفة.

- **في مرحلة المجموعات المتعاونة، يقوم المتعلم بمحاولة حل المهمة المطلوبة بشكل تعاوني من خلال مشاركة المتعلم بإيجابية في الحوار والمناقشة بين أفراد المجموعة الواحدة، ومساعدة أقرانه في حل المهام المطروحه.**
- **في مرحلة المشاركة، يشارك المتعلم في الحوار الذي يتم بين المجموعات حول الأفكار والحلول المختلفة للمهمة المطروحة، ويستمع جيدًا إلى حلول الآخرين ويناقشها ويقيمها.**

المحور الثالث: عمق المعرفة الرياضية Depth of Mathematical knowledge

عمق المعرفة:

يعد تصنيف بلوم للمجال المعرفي من أشهر وأهم المحاولات التي صنفت نتاجات المجال العقلي ومن أكثرها استعمالاً وشيوعًا، ويعتمد هذا التصنيف بشكل رئيس على استخدام الأفعال السلوكية فقط للتمييز بين مستويات التصنيف؛ لذلك لم يكن كافيًا لتقييم المتعلمين، ولتمكينهم من مستويات التفكير العليا، ومن تقديم مستويات أداء مرضية، نتيجة لذلك قدم نورمان ويب Norman Webb نموذج عمق المعرفة Depth of Knowledge (DOK) ؛ للتغلب على مشكلة تصنيف بلوم، حيث لم ينصب العمق المعرفي في هذا النموذج على الفعل، وإنما انصب على السياق الذي يتم فيه استخدام الفعل وعلى العمليات العقلية التي يتم ممارستها؛ أي أنه يركز على ما يلي الفعل من عمليات ما وراء معرفية (الفايز، ٢٠١٧، Khudhair & Jasim, 2021, 1340 ؛).

وفي دراسة قام بها Weay et al. (2016) تناولت تحليل وتقييم كل من تصنيف بلوم المعدل للمعرفة وتصنيف مستويات عمق المعرفة لويب والمقارنة بينهما؛ وحددت نتائج الدراسة أن تصنيف ويب لعمق المعرفة هو التصنيف المعرفي الفعال في تقييم المتعلمين وفي تعزيز الفهم ومهارات التفكير الناقد لديهم، حيث أن تصنيف بلوم يفتقد إلى وجود معايير للحكم على نتائج التعلم والتعمق فيها.

كما أن في تصنيف بلوم يتقدم المتعلمين من المستوى الأول إلى المستوى السادس عندما يصبحوا أكثر دراية وكفاءة بالمحتوى، ولكن في نموذج عمق المعرفة يجوز للمتعلمين التفاعل في نفس الوقت مع جميع مستويات التعلم الأربعة (Branscome & Robinson, 2017, 3).

لذا كان لابد من الانتقال من ثقافة التقييم القائمة على المحتوى إلى التقييم القائم على المعايير، ونموذج عمق المعرفة يعتمد في عملية تقييم المتعلمين على الربط بين المحتوى والمعايير ومستويات التفكير التي يجب أن يتقنها المتعلم Czarnocha, & (Hess, 2013, 4 ؛ Baker, 2018,93)

فعملية التقييم يجب أن تشمل المحتوى الذي يتم تقييمه، والعمق الذي نتوقعه من المتعلمين لإثبات فهمهم لهذا المحتوى (Hess et al, 2009, 4) .

وقد عرفت تمساح (٢٠٢٠ب، ١٢٣١) عمق المعرفة بأنه: مستوى المعالجة أو العمليات العقلية التي يمارسها المتعلم للمعارف والمعلومات التي تقدم له في المحتوى؛ للوصول إلى فهم أعمق لهذة المعارف والمعلومات.

كما عرف كل من حسن، والدسوقي (٢٠٢٢، ١١) عمق المعرفة بأنه: درجة تعقيد التفكير التي يتفاعل من خلالها المتعلم مع المعارف والمهارات المتضمنة في المحتوى.

ولتحديد درجة عمق المعرفة التي يحتاجها المتعلم عند إنجاز نشاط معين، يجب الإجابة عن الأسئلة التالية:(Marconi et al, 2009,4)

- ما هو مستوى العمل المطلوب من المتعلم القيام به؟
- ما مدى درجة تعقد المهمة المطلوبة وليس درجة الصعوبة؟
- ما مقدار المعارف والمهارات التي يمتلكها المتعلم والتي يحتاج إليها لإكمال المهمة؟

حيث تختلف المعرفة في تعقيدها حسب مقدار المعرفة السابقة الموجودة في البنية المعرفية لدى المتعلم، ومدى قدرته على ربط المعارف السابقة بالمعارف الجديدة، ونقلها إلى مواقف مختلفة .(Al-Saadi & Al-Kinani, 2021, 5133)

مما سبق نستخلص أنه للتحول من التقييم القائم على المحتوى إلى التقييم القائم على المعايير، لابد أن يتم ذلك من خلال التعمق في المعرفة، عن طريق البعد عن السطحية في التعلم، ومعالجة المعرفة بصورة أعمق من خلال ربط المعرفة الجديدة المكتسبة بالمعرفة الموجودة سابقًا لدى المتعلم، بالإضافة إلى التمكن من تطبيق المعرفة في مواقف جديدة؛ فمن خلال المعرفة العميقة يصبح المتعلم أكثر قدرة على فهم معنى ما يتعلمه بشكل صحيح، كما يصبح أكثر قدرة على اتخاذ القرارات وحل المشكلات التي تقابلة.

مفهوم عمق المعرفة الرياضية:

تعددت التعريفات التربوية حول مفهوم عمق المعرفة الرياضية، حيث يذكر كل من Taylor (2021, 10) ، Kim and Eunyoung (2015, 5) أن عمق المعرفة الرياضية يشير إلى كم المعرفة الأساسية التي يجب أن يمتلكها المتعلمين من أجل فهم المحتوى الرياضي وما به من أفكار، وإلى أي مدى ينبغي أن يكونوا قادرين على نقل هذه المعرفة إلى مختلف السياقات، وقدرتهم على تكوين التعميمات واستخدام ما تعلموه في العالم الحقيقي.

وعرف كل من إبراهيم، ومرسال (٢٠٢٢، ٢١٣) عمق المعرفة الرياضية بأنها: "إطار تنظيمي للمعرفة والمهارات الرياضياتية التي يجب ان يمتلكها التلميذ، وتتدرج في أربع مستويات متزايدة العمق والقوة تبدأ بالقدرة على استدعاء الحقائق والمصطلحات والإجراءات البسيطة، ثم القدرة على تطبيق المفاهيم والمهارات الرياضياتية، يليها القدرة على استخدام عمليات التفكير العليا وطرح المبررات المنطقية، وتنتهي بالاستخدام الموسع لعمليات التفكير العليا في حل المشكلات الواقعية".

وعرفتها الحنفي (٢٠٢٢، ٤٣) بأنها: "مستوى التعقيد المعرفي للمعلومات الرياضية، ومستويات التفكير التي يجب على المتعلم التمكن منها لمعالجة المعرفة الرياضية بصورة عميقة".

في ضوء ما سبق يعرف البحث الحالي عمق المعرفة الرياضية بأنها: كم المعارف والمهارات التي يجب أن يتمكن منها المتعلم في مادة الرياضيات من أجل فهم المحتوى الرياضي، والقدرة على ربط المعرفة الجديدة بالمعرفة السابقة، وحل المشكلات الرياضية وأداء المهمات بنجاح، وتطبيق المعرفة المكتسبة في سياقات مختلفة؛ ليصبح التعلم ذو معنى ومغزى بالنسبة له.

مستويات عمق المعرفة الرياضية:

مستويات عمق المعرفة الرياضية هى تنظيم منطقي محكم للمعارف والمهارات المتضمنة في محتوى الموضوع الدراسي التي يجب أن يتمكن منها المتعلم وفقًا لدرجة عمقها وقوتها (حسن، الدسوقي، ٢٠٢٢، ١١).

حيث تصنف المعرفة حسب مستوى عمقها أو قوتها؛ أي حسب درجة تعقد التفكير المطلوب لإنجاز المهمة أو درجة المعالجة العقلية المطلوبة من المتعلم لإتمام نشاط معين (Marconi et al, 2009, 3).

وفي ضوء ذلك تم تصنيف المعرفة إلى أربعة مستويات متدرجة، تتمثل فيما يلي: (webb, 2002 ؛ Hess et al, 2009, 4 ؛ Hess, 2013, 4-18 ؛ Weay et al, 2016, 11)

- المستوى الأول: مستوى الاستدعاء والتذكر: يتضمن هذا المستوى استدعاء وتذكر المعلومات والمعارف، والمتمثلة في التعريفات، والحقائق، والمصطلحات، والتعميمات، بالإضافة إلى إمكانية إجراء خوارزمية بسيطة؛ حيث يتطلب من المتعلم أن يظهر استجابة روتينية، أو يتبع اجراء محدد بوضوح، أويستخدم خوارزمية معروفة لحل المشكلة، أو اجراء عمليات حسابية بسيطة.
- المستوى الثاني: مستوى تطبيق المفاهيم والمهارات: هذا المستوى أعمق من المستوى السابق؛ حيث يتطلب من المتعلم اجراء عمليات عقلية بسيطة على المعلومات التي قام باستدعائها وتذكرها في المستوى الأول، كتفسير هذه المعلومات، وتطبيق المفاهيم والمهارات، واتخاذ بعض القرارات للتعامل مع المشكلة المطروحة، وجمع البيانات وتدوين الملاحظات وتصنيفها وتنظيمها وعرضها في جداول أو رسومات أو أشكال بيانية.
- المستوى الثالث: مستوى التفكير الاستراتيجي: يتطلب هذا المستوى من المتعلم الوصول إلى مستوى أعلى من التفكير، والقدرة على استخدام عمليات التفكير العليا، والانخراط في التفكير الموسع المنطقي، والتخطيط، واستخدام الأدلة؛ حيث أن المتطلبات العقلية لهذا المستوى تكون مجردة ومعقدة، مثل القدرة على التحليل، والتركيب، والتقويم، والتنبؤ بالنتائج، والقدرة على شرح التفكير، وتبرير الاستجابة المقدمة، وحل مشكلات غير مألوفة، والقيام بسلسلة من الخطوات لحل المشكلة، واستخلاص النتائج من الملاحظات، والإستشهاد بالأدلة، والتحقق من معقولية النتائج.
- المستوى الرابع: مستوى التفكير الممتد: وهو أعلى مستويات عمق المعرفة، فهو تفكير موسع يعالج جوانب متعدد من المهمة أو المشكلة، ويتطلب تنفيذ الأنشطة االعقلية

المعقدة والمركبة؛ لذا في هذا المستوى يجب أن يكون العمل معقدًا جدًا، والمطالب المعرفية للمهمة عالية وبالغة التعقيد؛ حيث يشمل هذا المستوى تصميم التجارب، والنقد، والتحليل، والتأمل، والربط بين الأفكار وتكوين مفاهيم جديدة، وكتابة التقارير، واجراء الاستقصاءات وتطبيق المهارات على العالم الحقيقي، وملاحظة المغالطات الرياضية، واقتراح عدة طرق لحل المشكلة الرياضية، واستنتاج تعريفات مختلفة للمفهوم الرياضي، وتصميم نموذج رياضي لحل موقف مجرد، والجمع بين الأفكار لإنتاج أفكار جديدة وأصيلة.

ويشير Taylor (2021, 10) إلى أن المستوى الأول من مستويات عمق المعرفة يطلق عليه مستوى (اكتساب المعرفة)؛ حيث يكتسب المتعلم فيه المعرفه المختلفة من تعريفات وحقائق ومفاهيم وغير ذلك، والمستوى الثاني هو مستوى (تطبيق المعرفة)؛ حيث يقوم المتعلم فيه باستخدم المعرفة للإجابة عن الأسئلة ومعالجة المشكلات، وإنجاز المهام، والمستوى الثالث هو مستوى (تحليل المعرفة)، وفيه يفكر المتعلم بشكل استراتيجي في كيفية ولماذا يمكن استخدام المعرفة للوصول إلى الإجابات والاستنتاجات والنتائج وشرحها، أما المستوى الرابع والأخير هو مستوى (زيادة المعرفة) الذي يفكر المتعلم فيه بشكل مكثف في كيفية استخدام المعرفة بطريقة أصيلة في السياقات المختلفة.

وقد حدد كل من Serianni and Brooksher (2016) نوع التفكير المستخدم في كل مستوى من مستويات عمق المعرفة كما يلي:

- **المستوى الأول: يستخدم فيه التفكير الروتيني Routine Thinking؛ لاستدعاء أو إعادة إنتاج المعرفة أو المهارات.**
- **المستوى الثاني: التفكير المستخدم فيه هو التفكير النظري Conceptual Thinking الذي يتطلب من المتعلم معرفة المهارات أو المفاهيم قبل الرد أو الإجابة.**
- **المستوى الثالث: يستخدم فيه التفكير الاستراتيجي قصير المدى Short–Term Strategic Thinking؛ لمحاولة التنبؤ بالنتائج والحلول للمشكلات.**
- **المستوى الرابع: يستخدم التفكير الممتد Extended Thinking؛ للبحث عن حلول لمشاكل للعالم الحقيقي.**

من خلال ما سبق نجد أن مستويات عمق المعرفة هى مستويات عقلية معرفية متدرجة يبدأ كل مستوى فيها من حيث ينتهي المستوى الذي يسبقه ويمهد للمستوى الذي

يليه، وهذه المستويات تصف نوع التفكير المطلوب لأداء المهمة؛ فهى لا تنظر إلى الفعل ولكن تنظر إلى ما وراء الفعل وهو درجة تعقد التفكير المطلوب لإنجاز المهمة، كما أنها تركز جميعها على ربط المعرفة الجديدة التي يكتسبها المتعلم بالمعرفة السابقة لديه، ومعالجتها، وتطبيقها في نواحي مختلفة، وربطها بالحياة الواقعية باستخدام طرق وأساليب التفكير المختلفة؛ لجعل التعلم ذي معنى ومغزى، ولكي يتحقق الربط بين المعارف السابقة والمعارف الجديدة ويتم التكامل بينهما لابد من تدريب المتعلمين على الفهم والتفكير في المعارف التي يحصلون عليها، وعلى تطبيق ما تعلموه، ونقله إلى مواقف جديدة.

وتتسم مستويات عمق المعرفة بالآتي:

- يمكن تنميتها من خلال جميع المواد الدراسية؛ فهى ملائمة لجميع المواد الدراسية نظرًا لتعدد مستوياتها، وتنوع أهداف كل مستوى.
- مناسبة لجميع مستويات المتعلمين المختلفة، نتيجة احتوائها على جميع أنواع المعرفة السطحية والمعقدة، واشتمالها أيضًا على كل من مهارات التفكير الأساسية والعليا؛ لذا فإنه ، فهى تناسب جميع المتعلمين في جميع المراحل الدراسية.

أهمية تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية:

لتنمية مستويات عمق المعرفة لدى المتعلمين أهمية بالغة تتمثل فيما يلي:

- اتاحة الفرصة أمام المتعلمين للتعبير عن فهمهم باستخدام الأدلة والبراهين، وتشجيعهم على عمليات البحث والتحليل والتركيب والتفسير والإكتشاف، وتقديم التفسيرات الرياضية التي تبرر حلولهم المختلفة لحل المشكلات؛ مما يساهم في تحقيق التعلم ذى المعنى (عبد الله، ٢٠٢٢، ٢٣٦).
- اكساب المتعلمين القدرة على فهم الأفكار وتفسير المعلومات بعمق وبشكل أكثر موضوعية، وتطبيق المعرفة الرياضية في المواقف الجديدة، بالإضافة إلى اكساب المتعلم القدرة على طرح الأسئلة، وتحليلها، وتمييزها، ومقارنتها، وتقييما (Khudhair & Jasim, 2021).
- الاهتمام بتنمية مستويات عمق المعرفة داخل الفصول الدراسية يزيد من مشاركة المتعلمين في التخطيط والبحث واستخلاص النتائج حول ما يتعلموه من بداية الدرس إلى نهايته(Baer, 2016, 18).

- **عمق المعرفة الرياضية يزيد من دعم خبرات التعلم لدى التلاميذ، ودقة التعلم لديهم، وزيادة كفاءتهم في التعامل مع مشكلات العالم الواقعي، والتفكير بشكل نقدي في المواقف المعقدة؛ وهو بذلك يؤهل المتعلم لمواكبة متطلبات القرن الحادي والعشرين (إبراهيم، ومرسال ٢٠٢٢، ٢١٦).**
- **تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين ينمي لديهم مهارات التفكير العليا والتي منها مهارات التفكير الإبداعي والاستراتيجي؛ مما يؤهلهم إلى أن يصبحوا ناجحين اقتصاديًا، يمتلكون مهارات الاقتصاد القائم على المعرفة (Kim & Eunyoung, 2015, 3).**
- **تنمي لدى المتعلم عادات العقل الفعالة، ليصبح مواطن مسئول منتج يمتلك مهارات التفكير ومهارات القرن الحادي والعشرين التي تؤهله لمواجهة المستقبل Marconi et al, 2009,15).**
- **يهدف تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية إلى تنمية مهارات التفكير المختلفة وتحسين تعلم التلاميذ وبقاء أثر التعلم لديهم، واكسابهم القدرة على التعلم الذاتي، وتوجيههم نحو دراسة ما هو أبعد من متطلبات المادة الدراسية (عبد الرحيم، ٢٠٢٠، ١٥١).**
- **تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية يساعد المتعلمين على فهم المشكلات الرياضية، والمثابرة على حلها، والقدرة على بناء الحجج وتقييم ونقد أفكار الآخرين (Patterson et al, 2013, 41).**

وبالإضافة إلى ما سبق يضيف البحث الحالي المميزات التالية لأهمية تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلم:

- **تساعد المتعلم في بناء الخبرات، وتنظيم عملية التعلم.**
- **تمكنه من الفحص الناقد للأفكار الرياضية؛ للوصول إلى أقصى درجات الفهم.**
- **تشجعه على التنبؤ، وتنمي قدرته على حل المشكلات واتخاذ القرارات المناسبة.**
- **تنمي قدرته على تفسير المعلومات بعمق.**
- **تنمي لديه مهارت التفكير المنطقي والتأملي والإستدلالي.**
- **تساهم في بقاء أثر التعلم لأطول فترة.**

- **تزيد من الرغبة في التعلم والاندماج بشكل أكثر فاعلية في بيئة التعلم.**

ونظرًا لأهمية مستويات عمق المعرفة الرياضية، فإنه على مستوى البحث في تربويات الرياضيات تعكس نتائج بعض البحوث والدراسات السابقة ضرورة تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية كأحد النواتج المهمة لتعليم مادة الرياضيات في المراحل التعليمية المختلفة، ومن هذه الدراسات: دراسة Patterson et al (2013) التي هدفت إلى الكشف عن مدى معرفة المعلمين واستخدامهم لمستويات عمق المعرفة الرياضية في بناء الاختبارات الخاصة بمادة الرياضيات لطلاب المرحلة الثانوية، وكشفت النتائج أن هناك قصور لدى المعلمين في تقييم الطلاب في ضوء المستويين الثالث والرابع من مستويات عمق المعرفة الرياضية؛ حيث أن التقييم يقتصر فقط على المستوى الأول والثاني من مستويات عمق المعرفة الرياضية، واستخدمت دراسة Baer (2016) التعلم الموجه القائم على الاستفسار، وسقالات المفاهيم، والإستفادة من أدوات التكنولوجيا، في دعم التعلم، وتعزيز مستويات عمق المعرفة لدى المتعلمين، ودراسة الفايز (٢٠١٧) التي اهتمت بتحديد مستويات عمق المعرفة الرياضية في كتب الرياضيات للصفوف الأساسية العليا، وقامت دراسة حسن (٢٠١٨) ببناء استراتيجية مقترحة في ضوء نظرية فيجوتسكى لتنمية عمق المعرفة الرياضية ومسؤولية تعلم الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، وتحققت نتائج الدراسة من فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ومهارات مسؤولية تعلم الرياضيات لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، ودراسة إيهاب محمد (٢٠١٩) أعدت وحدة مقترحة في الرياضيات قائمة على المنطق الفازي " Logic Fuzzy" لتنمية مستويات عمق المعرفة ومهارات اتخاذ القرار لدى طلاب الفرقة الثالثة بكلية التربية شعبة الرياضيات، وتوصلت النتائج إلى وجود فرق دال احصائيًا بين متوسطي درجات عينة البحث في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ومقياس مهارات اتخاذ القرار، كما صممت دراسة الرفاعي (٢٠١٩) بيئة تعلم إلكترونية تكيفية قائمة على نموذج التلمذة المعرفية، وأثبتت فاعليتها في تنمية مهارات إنتاج المحتوى الرقمي وعمق المعرفة لطلاب تقنيات التعليم ذوي التبسيط والتعقيد المعرفي، واستخدمت دراسة عبدالرحيم (٢٠٢٠) التعلم التوليدي لتنمية عمق المعرفة الرياضياتية والثقة بالقدرة على تعلم الرياضيات لدى تلاميذ الصف الثالث الإعدادي، ودلت نتائج البحث على الأثر الفعال للتعلم التوليدي على تنمية مستويات عمق

المعرفة الرياضية، ودراسة عبد الملاك (٢٠٢٠) بحثت أثر استخدام استراتيجية الرياضيات الواقعية على تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية وتحسين الرغبة في تعلم الرياضيات لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي، وأشارت نتائج الدراسة إلى وجود أكثر كبير للاستراتيجية على تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية وتحسين الرغبة في تعلم الرياضيات، وأوصت الدراسة بضرورة تشجيع المعلمين على تنمية مستويات عمق المعرفة لدى التلاميذ في مراحل التعليم المختلفة، واهتمت دراسة كل من Al-Saadi and Al-Kinani (2021) بدراسة مستويات عمق المعرفة الرياضية وعلاقتها بمعالجة المعلومات لدى طلاب المدارس الثانوية، وأشارت النتائج إلى وجود علاقة ارتباطية موجبة بين عمق المعرفة الرياضية ومعالجة المعلومات، أما دراسة Khudhair and Jasim (2021) فقد اهتمت بتحليل محتوى كتب الرياضيات المدرسية للمرحلة الإعدادية في ضوء مستويات عمق المعرفة الرياضية؛ للتعرف على درجة توافر هذه المستويات في الكتاب المدرسي، وأشارت النتائج إلى إشتمال كتب الرياضيات للمرحلة الإعدادية على جميع مستويات العمق المعرفي بدرجات متفاوتة، كما أشارت دراسة محمد وآخرون (٢٠٢١) إلى فاعلية التعلم الخبراتي في تنمية عمق المعرفة وتحسين اليقظة العقلية في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية، وهدفت دراسة كل من إبراهيم ومرسال (٢٠٢٢) إلى قياس مدى تمكن كل من معلمي الرياضيات وتلاميذ المرحلة الإبتدائية من مستويات عمق المعرفة الرياضياتية في بيئات تعلم الرياضيات (دراسة تحليلية مقارنة)، ومدى تباين هذا التمكن بإختلاف بيئات تعلم الرياضيات، وأشارت النتائج إلى انخفاض مستوى تمكن عينة التلاميذ من أداءات عمق المعرفة الرياضية، بالإضافة إلى انخفاض مستوى تمكن عينة المعلمين من أداءات التدريس وفق مستويات عمق المعرفة الرياضية، أما دراسة الحنفي (٢٠٢٢) طورت بيئة تعلم تكيفية على منصة Smart Sparrow وفقًا للمستوى المعرفي، وأثبتت فاعليتها في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ومهارات التعلم الذاتي لدى تلاميذ الصف الثاني من المرحلة الإعدادية، واستخدمت دراسة عبد الله (٢٠٢٢) تطبيقات جوجل التفاعلية في تدريس الرياضيات لتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والتنور التكنولوجي لدى طلاب الصف الأول الثانوي، وتوصلت النتائج إلى وجود فرق دال احصائيًا بين متوسطي درجات طلاب المجموعة التجريبية وطلاب

المجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار عمق المعرفة الرياضية ومقياس التنور التكنولوجي لصالح طلاب المجموعة التجريبية.

يلاحظ من خلال ما سبق اهتمام الدراسات السابقة (العربية والأجنبية) في مجال تعليم وتعلم الرياضيات بتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية كناتج رئيس من نتائج تعلم الرياضيات المدرسية، حيث استخدمت الدراسات السابقة استراتيجيات وبرامج مختلفة لتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى جميع المتعلمين في جميع المراحل التعليمية، بالإضافة إلى الإهتمام بتوظيف واستخدام التكنولوجيا في تنمية عمق المعرفة الرياضية كدراسة كل من (Baer, 2016 ؛ الرفاعي، ٢٠١٩؛ الحنفي، ٢٠٢٢؛ وعبد الله،٢٠٢٢)، كما تنوعت المراحل الدراسية التي شملتها تلك الدراسات بدءًا من المرحلة الإبتدائية وحتى المرحلة الجامعية، بالإضافة إلى الإهتمام بفئة المعلمين وقيام بعض الدراسات التحليلية لمعرفة مدى تمكن المعلمين واستخدامهم لمستويات عمق المعرفة في عمليات التقويم الخاصة بمادة الرياضيات كدراسة كل من (Patterson et al , 2013 ؛ إبراهيم ومرسال، ٢٠٢٢).

وقد تم الاستفادة من هذه الدراسات السابقة في إعداد الإطار النظري للبحث الحالي الخاص بعمق المعرفة، وفي استخلاص مستويات عمق المعرفة الرياضية المناسبة لعينة البحث ومؤشرات تحقيق كل مستوى؛ للاستفادة من ذلك في إعداد اختبار عمق المعرفة الرياضية، بالإضافة إلى تفسير النتائج الخاصة بعمق المعرفة في ضوء النتائج التي توصلت إليها هذه الأبحاث والدراسات.

المحور الرابع: الفهم العميق في الرياضيات Deep understanding in mathematics

مفهوم الفهم العميق:

طرحت الدراسات السابقة العديد من التعريفات للفهم العميق في الرياضيات، حيث عرفت كل من ادم وعبد الحميد (٢٠١٧، ١٣٦) الفهم العميق في الرياضات بأنه استيعاب الطالب للأفكار الرياضية، وتفكيره في حل المشكلات الرياضية حلا إبداعيًا، وتوظيف خبراته الرياضية في مواقف جديدة.

وعرفه زنقور (٢٠١٨، ١١٨) بأنه: نتاج تلك الترابطات التي يقوم المتعلم بعملها بين المعلومات الجديدة المكتسبة وبين ما هو قائم في بنيته المعرفيه؛ مما يؤدي إلى خروج

وصلات تساعد ي الوصول إلى حلول منطقية ومعقولة لكل المواقف الرياضياتيه المتعلقة بتلك المفاهيم.

بينما عرفه عبد البر (٢٠١٩، ١٠٨) بأنه: قدة المتعلم على طرح التساؤلات المتعمقة أثناء تعلم مفردات ومفاهيم المحتوى الرياضي، واعطاء تفسيرات واستنتاجات مناسبة للموقف المشكل، وتوليد وانتاج بدائل متنوعة ومتعددة وغير تقليدية للمشكلات الرياضية، وتصور أو توقع نتائج معينة بالاستناد إلى بدائل معينة، مع إضافة تفاصيل جديدة ومتنوعة للفكرة الرياضية المطروحة.

ويرى الحنان (٢٠٢٠، ٢٤٣) أن الفهم العميق في الرياضيات هو قدرة المتعلم على الفحص الناقد للمحتوى الرياضي، وتضمنيه في بنيته المعرفية عن طريق تطبيق ما تعلمه في مواقف مختلفة جديدة، بجانب ممارسة مهارات التفكير التوليدي والقيام بطرح تساؤلات عميقة أثناء التعلم، وإعطاءالاستنتاجات والتفسيرات المناسبة.

كما عرفة أحمد (٢٠٢٠، ٣٩٦) بأنه: قدرة المتعلم على الشرح والتوضيح والتفسير، وطرح الأسئلة، وتوليد أفكار وحلول رياضية، واعطاء تفسيرات واتخاذ القرارات المناسبة أثناء تعلم المفاهيم والتعميمات الرياضية وفهمها بعمق وتوظيفها وربطها ببنيته المعرفية السابقة.

وسيد (٢٠٢٢، ٢٠٣) عرفه بأنه: قدرة الطالب على تفسير وشرح وتمثيل وربط ما تعلمه بشكل عميق؛ مما يجعله أكثر دراية بمسارات تفكيره، ويساعده على التطبيق في سياقات مختلفة ومواقف جديدة، وتبني أفكار ثبت صحتها والبناء عليها.

من خلال ملاحظة التعريفات السابقة يتضح أن الفهم العميق في الرياضيات لا يعتمد على اكتساب المتعلم للمعرفة فقط بل يعتمد على الإنتقال من مرحلة اكتساب المعرفة إلى مرحلة تحليلها، وتوضيحها، وشرحها وتفسيرها، وتوظيفها في المواقف التعليمية الجديدة والمختلفة.

وفي ضوء ذلك يمكن تعريف الفهم العميق في الرياضيات إجرائيًا بأنه: مجموعة العمليات الذهنية التي يقوم بها تلميذ الصف السادس الإبتدائي؛ لفهم المحتوى الرياضي والتي يقوم من خلالها بالفحص الناقد المفاهيم والأفكار الرياضية، وعمل ترابطات متعددة بين تلك الأفكار، وتوليد أفكار جديدة ومتعددة ومختلفة تتميز بالطلاقة والمرونه، وتقديم تفسيرات

منطقية للمواقف الرياضية، وطرح التساؤلات، واتخاذ القرارات بالإضافة إلى قدرته على تطبيق ما تعلمه في مواقف جديدة.

أبعاد الفهم العميق في الرياضيات:

الفهم العميق مفهوم معقد، ومتعدد الأبعاد يتضمن جوانب معرفية، وعقلية كالشرح، والتفسير، والتطبيق كما يتضمن جوانب وجدانية كالتعاطف ومعرفة الذات (سيد، ٢٠٢٢، ٢٠٥) .

وقد اهتمت العديد من الدراسات بدراسة وتحديد أبعاد الفهم العميق في الرياضيات التي يمكن تنميتها لدى المتعلمين؛ حيث أشارت دراسة محمد وآخرون (٢٠٢٣، ١٢٧) إلى أن أبعاد الفهم العميق في الرياضيات هى: قدرة المتعلم على الفحص الناقد للمحتوى الرياضي وتضمينه في بنيته المعرفية من خلال تطبيق ما تعلمه في مواقف جديدة، وممارسة مهارات التفكير التوليدي، والقيام بطرح تساؤلات عميقة أثناء التعلم، واعطاء التفسيرات والاستنتاجات المناسبة، بحيث يصبح تعلمه ذا معنى.

بينما حددت دراسة أحمد (٢٠٢٠، ٤٠٤) أهم أبعاد الفهم العميق في الرياضيات فيما يلي:

- قدرة المتعلم على شرح وتوضيح المفاهيم والتعميمات الرياضية.
- طرح المتعلم لأسئلة متعمقة متنوعة المستويات لعمل ترابط بين الأفكار، والمفاهيم، والتعميمات الرياضية.
- ترجمة الموقف الرياضي من صورة إلى صورة.
- إعطاء تفسيرات واستنتاجات منطقية للموقف الرياضي اعتمادًا على المعلومات السابقة وربطها بالمعلومات الجديدة.
- توليد أفكار واجابات مختلفة من خلال توظيف المفاهيم والتعميمات في المواقف الرياضية.
- اتخاذ القرارات المناسبة للموقف الرياضي مع تبرير هذا الاختيار.
- معرفة الذات من خلال معرفة المتعلم لمهاراته وأنماط تفكيره ومواضع قصوره لمحاولة علاجها والارتقاء بها.

وقد اتفقت أغلب الدراسات كدراسة آدم وعبد الحميد (٢٠١٧، ١٥٩)، ودراسة زنقور (٢٠١٨، ١١٩–١٢٠)، ودراسة الحنان (٢٠٢٠، ٢٥٩)، على أن أبعاد الفهم العميق في

الرياضيات تجمع ما بين مهارات التفكير التوليدي، وبعض المهارات الآخرى والتي يمكن توضيحهم فيما يلي:

١- مهارات التفكير التوليدي: والتي أشارت معظم الدراسات كدراسة Cai and Hwang (2002) ودراسة الجلبي (٢٠١٩)، ودراسة عبد المنعم، وآخرون (٢٠٢١)، ودراسة قرشم، وآخرون (٢٠٢٢) إلى أنها عبارة عن مجموعة من المهارات الإبداعية والاستكشافية؛ حيث أنها تضم المهارات التالية:

- **الطلاقة: وهى الجانب الكمي للإبداع، ويقصد بها القدرة على تعدد الإستجابات التي يمكن للمتعلم تقديمها؛ لإنتاج عدد كبير من الأفكار والحلول الصحيحة للمشكلة المطروحة.**
- **المرونة: وهى الجانب النوعي للإبداع، وتشير إلى القدرة على الوصول إلى حل المشكلة المطروحة بأكثر من طريقة.**
- **الأصالة: وهى قدرة المتعلم على الإنفراد بالأفكار الجديدة، غير التقليدية، قليلة التكرار، فالفكرة كلما كانت أقل شيوعًا زادت درجة أصالتها.**
- **وضع الفرضيات: وهى قدرة المتعلم على توليد العديد من الأفكار حول المشكلة المطروحة عن طريق اكتشاف العلاقات والروابط بين المعارف، وتقييم البدائل، والبحث عن الأدلة والبراهين؛ من أجل الوصول إلى العديد من الحلول الممكنه للمشكلة.**
- **التنبؤ في ضوء المعطيات: وهى القدرة على قراءة المعلومات والمعطيات في المشكلة المطروحة، وتوقع نتائج معينة بالإستناد إلى المعرفة السابقة للمتعلم، والمعلومات المتوفرة**

لديه عن المشكلة المعروضة.

- **الاستدلال: وهى قدرة المتعلم على توليد المعرفة الجديدة بالإستناد إلى المعرفة المتوفره.**
- **التعرف على الأخطاء والمغالطات: وهى تتمثل في قدرة المتعلم على معرفة وتحديد الأخطاء والمغالطات الموجودة في خطوات حل المسائل الرياضية، أو الاستخدام الخاطئ للقوانين والنظريات في المواقف الرياضية المختلفة؛ ومن ثم تصحيحها للوصول إلى الحل الصحيح.**

- **التوسع: ويقصد بها قدرة المتعلم على الشرح وإضافة التفاصيل والمعلومات التي توضح الأفكار والمشكلات الرياضية المطروحه.**

٢- طرح الأسئلة: تتمثل في قدرة المتعلم على طرح العديد من الأسئلة المتنوعة مختلفة المستويات حول المشكلة المطروحة.

٣- التفسير: وهى نتيجة التعمق في الفهم، وتتمثل في قدرة المتعلم على اعطاء تبريرات منطقية لحل المشكلة الرياضية، وتوضيح المفاهيم والتعميمات التي استخدمها لحل المشكلة.

٤- اتخاذ القرار: وهى قدرة المتعلم على الاختيار الواعى بين البدائل المتاحة في موقف رياضي معين معتمدًا على ما لديه من بيانات متوفره فى ضوء معايير محددة؛ للوصول للقرار النهائي في حل الموقف المشكل.

في ضوء ما سبق نستخلص أنه لتنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى المتعلمين يجب الإبتعاد عن السطحية في التفكير، وفي معالجة المعلومات والإهتمام بتوجيه المتعلم نحو المعاجة الفعاله للمعلومات والمعارف الرياضية، وايجاد ترابطات بين المعرفه السابقة الموجوده بنيته المعرفيه وبين ما يتعلمه؛ سعيًا للحصول على معان وأفكار ومعارف جديدة.

وقد اقتصر البحث الحالي على أبعاد الفهم العميق التالية: التفكير التوليدي (الطلاقة، المرونه، التعرف على الأخطاء والمغالطات) – طرح الأسئلة – التفسير – اتخاذ القرار؛ وذلك نظرا لاتفاق أغلب الدراسات عليها، ولمناسبتها لطبيعة الوحدة التدريسية المختارة وامكانات وقدرات تلاميذ المرحلة الإبتدائية.

خصائص المتعلم ذو الفهم العميق في الرياضيات:

يتميز المتعلم ذو الفهم العميق في الرياضيات بالخصائص التالية:

- **لديه إدراك واستيعاب أفضل للمعرفة، والقدرة على استخدامها في مواقف تعلم متعددة وبأكثر من طريقة.**
- **الفضول والرغبة في البحث المستمر.**
- **القدرة على استخدام الحجج والبراهين.**
- **لديه ثقة بالنفس واندفاع نحو التعلم.**
- **لديه القدرة على التعامل مع المواقف المستجدة والمتغيرة.**

- **يتميز بعمق الأفكار والقدرة على التحليل الناقد لها.**
- **لديه القدرة على اتخاذ القرارت السليمة في حياته اليومية.**

أهمية تنمية الفهم العميق في الرياضيات:

الفهم العميق أصبح أساسيًا في متن جميع العمليات الرياضية؛ حيث أنه لايعني فقط معرفة المتعلم للمحتوى، والمهارة في أداء المهام، وإنما يهتم بتنمية قدرة المتعلم على توليد الأفكار، وطرح التساؤلات والتفسيرات، وإعادة تشكيل البناء المعرفي في ضوء المواقف الرياضية، والربط بين الأفكار الجديدة والنتائج المحتملة وغير المتوقعه، وهذه إشاره إلى قمة الإبداع في الرياضيات (زنقور، ٢٠١٨، ١٢٣).

لذا أكدت دراسة Pepin et al. (2017, 285) على أن التدريس الجيد والفعال لمادة الرياضيات هو الذي ينمى لدى المتعلم الفهم العميق للمادة.

كما أشارت دراسة Molina (2014, 7) إلى أن التركيز أثناء تدريس الرياضيات على تنمية الفهم العميق للرياضيات لدى المتعلمين ينمي لديهم جميع المهارات الرياضية التي تؤهلهم للالتحاق بمدارس STEM للعلوم، والتكنولوجيا، والهندسة، والرياضيات.

ويضيف البحث الحالي النقاط التالية التي توضح أهمية تنمية الفهم العميق في الرياضيات:

- **يدفع المتعلم نحو التعمق في فهم المحتوى الرياضي بطريقة أفضل، وربط العناصر ببعضها البعض؛ للخروج بأفكار ونتائج جديدة..**
- **يوسع مدارك المتعلمين ويزيد من قدراتهم الاستيعابية وتنمية مهاراتهم في توظيف المعرفة الجديدة في مواقف مختلفة ومتنوعة؛ مما يساعدهم في الوصول إلى حلول واجابات منطقية لكل المواقف والمشكلات الرياضية.**
- **زيادة دافعية المتعلمين لتعلم الرياضيات، والاستمتاع بتعلمها.**
- **يساعد المتعلم في عمل ترابطات بين المعرفة الجديدة والمعارف السابقة مما يساعد المتعلمين في تصحيح التصورات الخاطئة للمفاهيم والأفكار وتنمية القدرة على المقارنة، والتقييم، والنقد.**

وفي إطار الإهتمام بتنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى المتعلمين، تنوعت الدراسات والبحوث السابقة التي اهتمت باستخدام أساليب واستراتيجيات وطرق تدريسية

متعددة لتنمية أبعاد الفهم العميق في الرياضيات لدى المتعلمين في مراحل تعليمية مختلفة، كدراسة Vahey et al (2013) التي أثبتت فاعلية الأنشطة المنهجية التي تدعم استخدام التمثيلات الرياضية الديناميكية القائمة على التكنولوجيا في تنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى المتعلمين، كما أثبتت دراسة Murphy (2016) الأثر الفعال لاستخدام التكنولوجيا في تدريس الرياضيات على تنمية الفهم العميق في الرياضيات، وعلى إمكانية تعلم طلاب المرحلة الثانوية المفاهيم الجبرية بفهم أعمق، ودراسة كل من ادم وعبد الحميد (٢٠١٧) التي وظفت التعليم المتمايز في تدريس الهندسة من خلال الكتاب الإلكتروني لتنمية المستويات التحصيلية العليا ومهارات التواصل الرياضي والفهم العميق لدى طلاب الصف الثاني الإعدادي، وتوصلت النتائج إلى تفوق المجموعة التجريبة على المجموعة الضابطة في اختبار المستويات التحصلية العليا وفي اختبار مهارات التواصل الرياضي واختبار الفهم العميق، وهدفت دراسة زنقور (٢٠١٨) إلى دراسة أثر التفاعل بين تجزيل المعرفة الرياضياتية والنمط المعرفي (لفظي/ تخيلي)، والسعة العقلية (مرتفعي السعة/ منخفضي السعة) لتنمية الفهم العميق في الرياضيات لدي طلاب الصف الأول الثانوي، وكشفت النتائج عن وجود أثر لإختلاف أسلوب التدريس (التقليدي، التجزيل) على كل أبعاد الفهم العميق لصالح التجزيل الرياضياتي، كما كشفت وجود أثر لإختلاف السعة العقلية (مرتفعي السعة/ منخفضي السعة) في كل أبعاد الفهم العميق لصالح مرتفعي السعة، ودراسة عبد البر (٢٠١٩) أعدت نموذج تدريسي مقترح قائم على نظرية التعلم المستند للدماغ؛ لقياس فاعليته في تنمية الفهم العميق للرياضيات ومهارات ما وراء المعرفة لدى تلاميذ الصف الثالث الإعدادي، وتم التوصل إلى فاعلية النموذج المقترح في تنمية الفهم العميق للرياضيات ومهارات ما وراء المعرفة لدى تلاميذ عينة الدراسة، كما أعدت دراسة أحمد (٢٠٢٠) إستراتيجية توليفية قائمة على استراتيجيتي الأصابع الخمسة والرؤوس المرقمة لتنمية التحصيل والفهم العميق والاتجاه نحو العمل الجماعي في الرياضيات باللغة الإنجليزية لدى تلاميذ الصف الثالث الإبتدائي، وأثبتت فاعليتها في تنمية التحصيل والفهم العميق والاتجاه نحو العمل الجماعي في الرياضيات لدى تلاميذ المجموعة التجريبية، ودمجت دراسة الحنان (٢٠٢٠) بين استراتيجيتي حدائق الأفكار وشكل البيت الدائري في تنمية الفهم العميق للرياضيات والتمثيل الرياضي لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي وتوصلت نتائج

الدراسة إلى وجود فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين الضابطة والتجريبية في التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق للرياضيات، ولاختبار مهارات التمثيل الرياضي لصالح المجموعة التجريبية، بينما استخدمت دراسة سيد (٢٠٢٢) الجيوجبرا في تنمية الكفاح المنتج والفهم العميق في وحدة الهندسة والقياس لطلاب الصف الأول الإعدادي، وتوصلت نتائج البحث إلى وجود فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق ككل وفي كل أبعاد الاختبار لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية، وهدفت دراسة محمد وآخرون (٢٠٢٣) إلى قياس أثراستخدام نموذج التفكير السابر لعلاج المغالطات الهندسية وتنمية الفهم العميق لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي، وتوصلت نتائج الدراسة أن استخدام نموذج التفكير السابر له أثر كبير في تنمية أبعاد الفهم العميق في الرياضيات، وفي الكشف عن المغالطات الهندسية وعلاجها لدى تلاميذ عينة الدراسة، وفي ضوء ذلك أوصت الدراسة بضرورة استخدام معلمي الرياضيات للنماذج الحديثة في تدريس الرياضيات وخاصة نموذج التفكير السابر.

يلاحظ من الدراسات السابقة اهتمام الأدبيات التربوية في مجال تعليم وتعلم الرياضيات بالفهم العميق في الرياضيات، وهذا يعكس أهمية وضرورة تنميته لدى المتعلمين؛ حيث اهتمت الدراسات السابقة بتنمية الفهم العميق في الرياضيات باستخدام نماذج واستراتيجيات وبرامج تعليمية مختلفة، كما تنوعت العينات والمراحل الدراسية التي شملتها تلك الدراسات بدءًا من المرحلة الابتدائية وحتى المرحلة الثانوية؛ مما يدل على أهمية تنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى جميع المتعلمين في مختلف المراحل التعليمية.

وبالرغم من أن هذه الدراسات اهتمت بتنمية الفهم العميق في الرياضيات كما هو في البحث الحالي، وذلك من خلال استخدام استراتيجيات أو برامج مقترحة، ولكن لا توجد دراسة من بين هذه الدراسات قامت باستخدام استراتيجية مقترحة قائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية الفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية، وهذا ما سيقوم به البحث الحالي.

وسوف يستفاد من الدراسات السابقة في إثراء الإطار النظري للبحث الحالي الخاص بالفهم العميق، واستخلاص أبعاده، وبناء اختبار الفهم العميق في الرياضيات وكيفية تطبيقه

على تلاميذ المرحلة الإبتدائية، بالإضافة إلى تفسير النتائج الخاصة بالفهم العميق في الرياضيات في ضوء ما تم التوصل إليه من نتائج للبحوث والأدبيات السابقة.

المحور الخامس: الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي:

في ضوء الإطلاع على بعض الأدبيات والدراسات السابقة التي تناولت نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي، وبناء الإستراتيجيات التدريسية، مثل دراسة Apriliana et al. (2019)، ودراسة البلادي (٢٠١٩)، ودراسة العييد (٢٠٢١)، ودراسة Gusnur (2021)، ودراسة محمد (٢٠٢١)، ودراسة المسرحي، والسعيدي (٢٠٢١)، ودراسة Lo and Tsai (2022)، ودراسة Pristel et al. (2022) ، تم تصميم الاستراتيجية المقترحة في البحث الحالي وفقًا للخطوات التالية:

١- مراجعة الأدبيات والدراسات السابقة التي اهتمت بنموذجي التلمذة المعرفية وويتلي، من حيث الأسس التي قاموا عليها، وخطوات تنفيذ كل منهم في العملية التدريسية، وكذلك مراجعة الأدبيات والدراسات التي اهتمت بتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات.

٢- تحديد الهدف من الاستراتيجية المقترحة؛ حيث تهدف الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي إلى تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي.

٣- تحديد أسس بناء الاستراتيجية المقترحة: تستند الاستراتيجية المقترحة على الأسس التالية، المنبثقة من فلسفة النظرية البنائية:

- جعل المتعلم هو محور العملية التعليمية، والتأكيد على أن إيجابية ونشاط المتعلم شرط للتعلم.
- التعلم يكون أفضل عندما يواجه المتعلم بمهام ومشكلات حقيقية ذات علاقة بخبراته الحياتية، ومن واقع حياته واحتياجاته؛ لكي يصبح التعلم ذا معنى بالنسبه له.
- المتعلم يبني معرفته بنفسه ويكتسبها من خلال المهام والأنشطة التي يشارك فيها في الموقف التعليمي، مستخدمًا خبراته السابقة في تكوين المعرفة الجديدة.
- المعرفة السابقة للمتعلم شرط أساسي في بناء المعرفة الجديدة، وفي حدوث التعلم ذي المعنى.

- **تشجيع المتعلمين على تحمل المسؤلية، والاعتماد على النفس، وتشجيع البحث والاستقصاء لديهم؛ للحصول على المعرفة.**
- **الإهتمام بالتفاعلات الاجتماعية والتعاون بين التلاميذ في مواقف التعلم داخل غرفة الصف؛ حيث أن التعلم يكون أفضل ضمن سياق اجتماعي.**
- **طرح المهام والأنشطة التعليمية التي تثير وتدعم أنواع التفكير المختلفة، وتنمي مستويات عمق المعرفة لدى التلاميذ.**
- **إثارة المناقشات والجدل بين التلاميذ؛ للوصول إلى مرحلة الفهم العميق.**
- **تنويع وتنظيم وتتابع الأنشطة والمهام التي يقوم بها التلاميذ من البسيط إلى المركب؛ لتتناسب مع التدرج في مستويات عمق المعرفة الرياضية.**
- **التأكيد على دور المعلم في التوجيه والإرشاد والدعم.**
- **تهيئة البيئة التعليمية المناسبة المحفزة للتفكير والبحث والتقصي.**

٤- تحديد مراحل الاستراتيجية المقترحة:

- **المرحلة الأولى: مرحلة التهيئة والإثارة، وتنشيط المعرفة السابقة: وتتضمن الخطوات التالية التي تتم بصورة منظمة وهادفة لإثارة دافعية المتعلمين وتشويقهم لتعلم الموضوع الجديد، وتنشيط المعرفة السابقة لديهم:**
  - **تحديد متطلبات التعلم السابقة، واللازمة لتعلم الموضوع الجديد.**
  - **تنشيط عمليات التفكير من خلال طرح الأسئلة المحفزة المرتبط بمحتوى الدرس، وتوفير تحديات مناسبة للتلاميذ؛ لتشجيعهم على المشاركة في المناقشات، ولجعلهم أكثر اهتمامًا ومشاركة في العملية التعليمية.**
- **المرحلة الثانية: مرحلة البناء المعرفي: في هذة المرحلة يقوم المعلم بالنمذجة، ويقوم التلاميذ بجمع المعرفة، وفهمها، والبناء على المعرفة السابقة؛ حتى تصبح جزء من البناء المعرفي لديهم، ويستطيعون استخدامها بأنفسهم والعمل بها، وتتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:**
  - **عرض المعرفة وتقنيات حل المشكلة ضمن السياق الحقيقي؛ عن طريق النمذجة التي يقدم فيها المعلم المعرفة من خلال العرض العملي.**

- **تكليف التلاميذ في مجموعات بحل بعض المشكلات، والمهام التعليمية بالطريقة التي قام بها المعلم.**
- **مراقبة المتعلمين أثناء حل المشكلات وتقديم الدعم والمساعدات إذا كان هناك حاجة لهما، بالمستوى الملائم لكل منهم وفي الوقت المناسب، حيث يمكن أن يتمثل الدعم في (تعليمات نصية، رسوم توضيحية، وسائط متعددة مسموعة ومرئية)**

➢ **المرحلة الثالثة: التطور المعرفي: وهي مرحلة النشاط والفاعلية، حيث يتم في هذه المرحلة طرح مهمات تعليمية تمثل مواقف متنوعة ومختلفة يطبق عليها التلميذ المعرفة التي اكتسبها في بيئات مختلفة وعلى نطاق واسع وفي سياقات متنوعة؛ مما يؤدي به إلى التطور المعرفي حيث تتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:**

- **طرح مهام التعلم، والمتمثلة في مجموعة من المشكلات والمواقف المتنوعة والمختلفة.**
- **توزيع المهام التعليمية على المجموعات، وحث المتعلمين على التفكير والبحث عن الحلول المتعددة للمهام المطروحة.**
- **تشجيع المتعلمين على الاشتراك في التفاعل والحواروالمناقشة، وإعطاء الفرصة لكل متعلم للمناقشة والتعبير عن رآيه داخل مجموعته.**

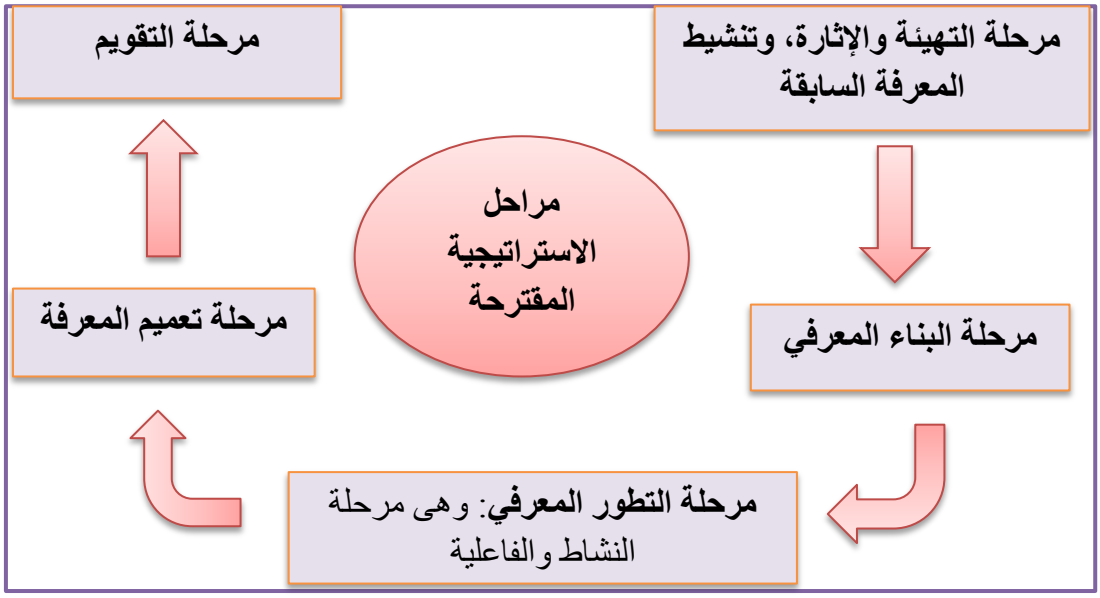
➢ **المرحلة الرابعة: مرحلة تعميم المعرفة: يتم في هذه المرحلة توفير فرص حقيقية لكل مجموعة إلى الإستماع إلى آفكار وآراء أخرى مختلفة وتفسيرات للمشكلة المطروحة عن طريق ما يلي:**

- **مشاركة المجموعات بعضها البعض في مناقشة ما تم التوصل إليه، من خلال عرض كل مجموعة، وتقديمها لما تم انجازة والتوصل إليه.**
- **اعطاء المجموعات الفرصة للتأمل، وإعادة النظر في الجهود التي تم بذلها،من خلال تحليل الأداء، وتحليل ما تم تعلمه، وتقييم الأداء والتفكير بالمقارنة مع باقي المجموعات؛ لتعديل وتحسين الأداء تدريجيًا، وتحديد التحسينات التي يمكن إجراؤها.**

➢ **المرحلة الخامسة: مرحلة التقويم: في هذه المرحلة يشجع المعلم التلاميذ على حل المشكلات بأنفسهم، والوصول إلى الإستقلالية في التعلم، وتتنوع أدوات التقويم في هذه المرحلة لتشمل:**

- **التقويم التكويني: يتم من خلال ملاحظة المعلم المستمرة للتلاميذ أثناء مشاركتهم في أداء الأنشطة وتنفيذ المهام الفردية والجماعية، وتدوين الملاحظات.**
- **التقويم الذاتي: وهو أن يقوم التلميذ بمراجعة أدائه ذاتيًا؛ لتحديد نقاط القوة والضعف لديه.**
- **تقويم الأقران، وتعلم التلاميذ من بعضهم البعض.**
- **الواجبات المنزلية.**

ويمكن تلخيص مراحل الاستراتيجية المقترحة في الشكل التالي:



فروض البحث:

في ضوء الاستفادة من الإطار النظري والدراسات السابقة؛ حاول البحث اختبار صحة الفروض التالية:

١- لا يوجد فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة).

Print:(ISSN 2682-2989) Online:(ISSN 2682-2997)

٢- لا توجد فاعلية للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

٣- لا يوجد فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة).

٤- لا توجد فاعلية للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

٥- لا توجد علاقة دالة إحصائيًا بين درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة) ودرجاتهم في التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة).

إجراءات البحث:

للإجابة عن تساؤلات البحث وللتحقق من صحة فروضه تم اتباع الإجراءات التالية:

أولاً: تحديد المحتوى التعليمي: تم اختيار وحدة "الهندسة والقياس" من منهج الرياضيات المقرر على تلاميذ الصف السادس الإبتدائي في الفصل الدراسي الأول٢٠٢١/٢٠٢٢ م؛ لأنها تحتوى على عدد من الدروس يسهل تقديمها وفقًا للإستراتيجية المقترحة، بالإضافة إلى ما يتوفر فيها من مفاهيم وتعميمات ومهارات يمكن تقديمها في صورة أنشطة ومهمات تعليمية يمارسها المتعلم تسهم في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق.

ثانيًا: تحليل المحتوى التعليمي: تم تحليل الوحدة الدراسية[١]؛ للتعرف على جوانب التعلم المختلفة (المفاهيم والتعميمات والمهارات) المتضمنة في موضوعات الوحدة، والتي تعد بمثابة متطلبات معرفية سابقة لدراسة جوانب التعلم الجديدة، وكذلك لمراعاتها عند إعداد دليل المعلم، وأوراق عمل التلميذ، وصياغة مفردات اختباري عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات.

[١] ملحق (١) تحليل محتوى الوحدة الدراسية.

وقد تم التحقق من صدق هذا التحليل عن طريق عرضه على مجموعة من السادة المحكمين (تخصص مناهج وطرق تدريس رياضيات)؛ لإقرار مدى صلاحيته، وقد اتفق المحكمين على اشتمال التحليل على جوانب التعلم المتضمنة بمحتوى الوحدة، كما وُجد اتفاق بين نتائج عملية التحليل وآراء المحكمين مما يدل على صدق التحليل، كما تم التأكد من ثبات التحليل عن طريق إعادة إجراء عملية التحليل لمحتوى الوحدة بفاصل زمني ١٥ يوماً، ومن ثم حساب ثبات التحليل باستخدام معادلة هولستي التالية:

معامل الثبات = $\frac{2M}{N1 + N2}$ (طعيمه، ٢٠٠٤، ٢٢٦)

حيث أن: M تشير إلى عدد النقاط التي تم الإتفاق عليها في التحليل الأول والثاني، N1 تشير إلى عدد الفئات في التحليل الأول، N2 تشير إلى عدد الفئات في التحليل الثاني؛ وتم الحصول على معاملات الثبات بين التحليلين كما يتضح في الجدول التالي:

جدول (٢)

يوضح نتائج عملية تحليل محتوى وحدة "الهندسة والقياس"

جوانب التعلم	التحليل الأول	التحليل الثاني	عدد نقاط الاتفاق	معامل الثبات
مفاهيم	٢٦	٢٤	٢٢	٠,٨٨
تعميمات	٤٥	٤٠	٤١	٠,٩٦
مهارات	١٨	١٥	١٥	٠,٩١
المجموع	٨٩	٧٩	٧٨	٠,٩٣

يتضح من الجدول أن معاملات الثبات بين التحليلين تتراوح ما بين ٠,٨٨ إلى ٠,٩٦ ، وهى معاملات ثبات عالية يمكن الوثوق بها؛ وتبين ثباتًا مرتفعًا لعملية التحليل.

ثالثًا: اعداد دليل المعلم وأوراق عمل التلميذ: تم إعادة صياغة وحدة "الهندسة والقياس" وفقاً للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي، وإعداد دليل للمعلم يوضح كيفية تدريس موضوعات الوحدة باستخدام هذه الاستراتيجية، وقد تضمن الدليل العناصر التالية:

أهمية الدليل بالنسبة للمعلم – نبذة عن نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي، ومستويات عمق المعرفة وأبعاد الفهم العميق في الرياضيات، والاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي – توجيهات للمعلم توضح له كيفية تنفيذ خطوات الاستراتيجية المقترحة في الفصل – محتوى الوحدة الدراسية التي سيتم تدريسها والخطة الزمنية اللازمة لتدريس كل موضوع – التخطيط لتدريس كل موضوع من موضوعات الوحدة.

كما تم إعداد أوراق عمل التلميذ الخاصة بالأنشطة، والتي تحتوي على أنشطة تثير التفكير يمارسها التلميذ بشكل فردي، وبشكل تعاوني في مجموعات تعاونية؛ لتنمية مستويات عمق المعرفة والفهم العميق في الرياضيات.

وقد تم عرض الدليل، وأوراق العمل في صورتهما الأولية على مجموعة من السادة المحكمين؛ بهدف التحقق من صلاحيتهما، وتم اجراء التعديلات اللازمة في ضوء آراء المحكمين، وبذلك أصبح الدليل في صورته النهائية[٢]، وأوراق عمل التلميذ[٣] صالحين للتطبيق على عينة البحث الأساسية.

رابعاً: إعداد قائمة مستويات عمق المعرفة الرياضية: تم إعداد هذه القائمة وفق الخطوات التالية:

١. تحديد الهدف من القائمة: تهدف القائمة إلى تحديد مستويات عمق المعرفة الرياضية، ومعيار أداء كل مستوى من هذه المستويات، ومؤشرات الأداء الدالة على كل مستوى من مستويات عمق المعرفة الرياضية التي يمكن تنميتها لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية.

٢. الصورة الأولية للقائمة وضبطها: فى ضوء ما أشارت إليه الدراسات والأدبيات السابقة التى تناولت مستويات عمق المعرفة الرياضية، ومن خلال الدراسة النظرية التى قامت بها الباحثتان في مستويات عمق المعرفة الرياضية (السابق تناولها) وبعد الاطلاع على بعض الاختبارات التى تقيس مستويات عمق المعرفة لدى التلاميذ؛ تم إعداد القائمة في صورتها الأولية وتشمل مستويات عمق المعرفة، وأمام كل مستوى معيار أداء هذا المستوى ومؤشرات الأداء الدالة عليه، وقد تم عرض القائمة على مجموعة من المحكمين في مجال المناهج وطرق تدريس الرياضيات، اللذين أقروا تمثيل معيار الأداء لكل مستوى من مستويات عمق المعرفة، ومناسبة مؤشرات تحقيق كل مستوى من مستويات عمق المعرفة الرياضية في تنمية المستوى، مع إجراء بعض التعديلات.

٣. الصورة النهائية للقائمة: تم وضع القائمة في صورتها النهائية[٤] حيث اشتملت على (٤) مستويات رئيسة لعمق المعرفة الرياضية (مستوى الإستدعاء والإسترجاع – مستوى

[٢] ملحق (٢) دليل المعلم القائم على الاستراتيجية المقترحة .
[٣] ملحق (٣) أوراق عمل التلميذ.
[٤] ملحق (٤) قائمة مستويات عمق المعرفة الرياضية.

المفاهيم والمهارات – مستوى التفكير الإستراتيجي – مستوى التفكير الممتد)، وأمام كل مستوى معيار أداء هذا المستوى ومؤشرات الأداء الدالة عليه.

خامسًا: اعداد أداتي البحث:

- **اعداد اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ؛ وذلك من خلال الخطوات التالية:**

١. **تحديد الهدف من الاختبار: يهدف الاختبار إلى قياس مدى تمكن تلاميذ الصف السادس الإبتدائي من مستويات عمق المعرفة الرياضية المتمثلة في: مستوى الإستدعاء والإسترجاع، مستوى المفاهيم والمهارات، مستوى التفكير الإستراتيجي، مستوى التفكير الممتد.**

٢. **تحديد مستويات الاختبار: تم تحديد مستويات عمق المعرفة الرياضية المستهدف تنميتها لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي في ضوء قائمة مستويات عمق المعرفة الرياضية التي تم إعدادها، والتي توضح معيار أداء كل مستوى ومؤشرات الأداء الدالة عليه.**

٣. **صياغة مفردات الاختبار: تم صياغة مفردات الاختبار عن طريق ترجمة كل مؤشر من مؤشرات تحقيق مستويات عمق المعرفة الرياضية إلى أسئلة بلغة الرياضيات، ومن ثم تم وضع قائمة بالمستويات ومؤشرات تحقيقها والأسئلة التى تقيسها[٥]، وقد تنوعت أسئلة الاختبار لتشمل مفردات تم صياعتها في صورة اختيار من متعدد، وهى خاصة بمستوى الإستدعاء والإسترجاع، ومفردات تم صياغتها في صورة أسئلة مقالية وهى خاصة بمفردات مستويات (المفاهيم والمهارات – التفكير الإستراتيجي – التفكير الممتد)، وقد تم وضع مجموعة من تعليمات الاختبار؛ ليسترشد بها التلميذ عند الإجابة، وروعي أن تكون سهلة وواضحة.**

٤. **تصحيح الاختبار وتقدير الدرجات: تم اتباع الآتي:**

لتصحيح مفردات مستوى (الإستدعاء والإسترجاع) يُعطى لكل سؤال درجة واحدة في حالة اختيار البديل الصحيح، وصفر في حالة اختيار البديل الخطأ؛ وبذلك تصبح الدرجة الكلية للمستوى (٩ درجات)، أما بالنسبة لمفردات مستوى (المفاهيم والمهارات)، ومستوى (التفكير الإستراتيجي) يُعطى لكل سؤال (٢ درجة) فتصبح الدرجة الكلية لكل مستوى (١٢ درجة)،

[٥] ملحق (٥) قائمة مستويات عمق المعرفة الرياضية ومؤشرات تحقيقها والأسئلة التى تقيسها.

وبالنسبة لمفردات مستوى (التفكير الممتد) يُعطى لكل سؤال (٣ درجات)، بحيث يتم تقسيم الثلاث درجات على خطوات الحل فتكون الدرجة الكلية للمستوى (١٢ درجة)؛ وبذلك تصبح الدرجة الكلية للاختبار ككل (٤٥ درجة)، كما بالجدول التالي:

جدول (٣)

توزيع مفردات ودرجات الاختبار على محاوره الأساسية:

م	مستويات عمق المعرفة	عدد المفردات	درجة كل مفردة	الدرجة العظمي للمستوى
١	الإستدعاء والإسترجاع	٩	١	٩
٢	المفاهيم والمهارات	٦	٢	١٢
٣	التفكير الإستراتيجي	٦	٢	١٢
٤	التفكير الممتد	٤	٣	١٢
	المجموع	٢٥ مفردة		٤٥ درجة

٥. صدق المحكمين: تم عرض الاختبار على مجموعة من المحكمين؛ لمعرفة آرائهم فيما يتعلق بمدى شمولية الاختبار لمستويات عمق المعرفة الرياضية، ومدى ارتباط كل مفردة بالمستوى الذي تقيسه، وسلامة الاختبار وصحته من حيث الصياغة والمضون، ومناسبته لمستوى التلاميذ، وفي ضوء آراء المحكمين، تم إجراء التعديلات اللازمة على بعض مفردات الاختبار.

٦. التجريب الاستطلاعي للاختبار: تم تطبيق الاختبار بصورته الأولية على عينة استطلاعية بلغت (٥٠) تلميذًا من تلاميذ الصف السادس الإبتدائي بمدرسة (الشهيد أحمد عبدالله الزقاقي) التابعة لإدارة ميت غمر التعليمية بمحافظة الدقهلية في العام الدراسي ٢٠٢٠/ ٢٠٢١ م (الفصل الدراسي الثاني)؛ وذلك بهدف تحديد ما يلي:

أ- حساب ثبات الاختبار: للتحقق من ثبات الاختبار تم اتباع الآتي:

- **حساب معامل ألفا لـ كرونباخ Alpha-Cronbach لمفردات كل مستوى على حدة (بعدد مفردات كل مستوى)، وفي كل مرة يتم حذف درجات إحدى المفردات من الدرجة الكلية للمستوى، وأسفرت تلك الخطوة عن أن جميع المفردات ثابتة، إذ وُجد أن معامل ألفا لكل مفردة أقل من أو يساوي معامل ألفا العام للمستوى الذي تنتمي إليه المفردة، والجدول التالي يوضح معاملات ثبات مفردات الاختبار:**

جدول (٤)

يوضح معاملات ثبات مفردات اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية.

مستوى الإستدعاء والإسترجاع		مستوى المفاهيم والمهارات		مستوى التفكير الإستراتيجي		مستوى التفكير الممتد	
رقم المفردة	معامل ألفا	رقم المفردة	معامل ألفا	رقم المفردة	معامل ألفا	رقم المفردة	معامل ألفا
١	٠.٦٦٤	١٠	٠.٧١٥	١٦	٠.٦٩٢	٢٢	٠.٧٣٦
٢	٠.٦٥٤	١١	٠.٧٠٨	١٧	٠.٧٠٢	٢٣	٠.٧١٢
٣	٠.٧٢١	١٢	٠.٧٠٢	١٨	٠.٦٥٩	٢٤	٠.٧٢٥
٤	٠.٦٥٩	١٣	٠.٦٩٨	١٩	٠.٦٩٨	٢٥	٠.٧٢١
٥	٠.٦٩٨	١٤	٠.٦٥٥	٢٠	٠.٦٣٢		
٦	٠.٧٥٢	١٥	٠.٦٩٧	٢١	٠.٧٠٥		
٧	٠.٦٥٣						
٨	٠.٧١٤						
٩	٠.٧١٢						
معامل ألفا العام للمستوى	٠.٧٦٤	معامل ألفا العام للمستوى	٠.٧٢٤	معامل ألفا العام للمستوى	٠.٧٠٩	معامل ألفا العام للمستوى	٠.٧٤٠

- **تم حساب ثبات المستويات الأساسية والثبات الكلي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية، عن طريق حساب معامل ألفا لـ كرونباخ، فوُجد أن معاملات ثبات المستويات الأساسية والثبات الكلي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية مرتفعة؛ مما يدل على الثبات الكلي للاختبار وثبات مستوياته الأساسية، كما بالجدول التالي:**

جدول (٥)

يوضح معاملات ثبات المستويات والثبات الكلي للاختبار.

م	مستويات عمق المعرفة الرياضية	معامل ألفا لـ كرونباخ
١	الإستدعاء والإسترجاع	٠.٧٦٤
٢	المفاهيم والمهارات	٠.٧٢٤
٣	التفكير الإستراتيجي	٠.٧٠٩
٤	التفكير الممتد	٠.٧٤٠
	الاختبار ككل	٠.٧٧٥

ب– حساب صدق الاختبار: للتحقق من صدق الاختبار تم إتباع الآتي:

- **حساب صدق المفردات: تم حساب صدق مفردات الاختبار عن طريق حساب معامل ارتباط بيرسون بين درجة المفردة والدرجة الكلية للمستوى الذي تنتمي إليه المفردة، في حالة حذف درجة المفردة من الدرجة الكلية للمستوى، باعتبار أن بقية مفردات المستوى محك المفردة؛ والجدول التالي يوضح معاملات صدق مفردات الاختبار:**

جدول (٦)

يوضح معاملات صدق مفردات الاختبار

مستوى الإستدعاء والإسترجاع		مستوى المفاهيم والمهارات		مستوى التفكير الإستراتيجي		مستوى التفكير الممتد	
رقم المفردة	معامل الارتباط	رقم المفردة	معامل الارتباط	رقم المفردة	معامل الارتباط	رقم المفردة	معامل الارتباط
١	٠.٤٢٩**	١٠	٠.٥٧٠**	١٦	٠.٦٢٨**	٢٢	٠.٧٦٣**
٢	٠.٤٢٣**	١١	٠.٦٧٨**	١٧	٠.٦٣٥**	٢٣	٠.٧٦٠**
٣	٠.٣٥٥**	١٢	٠.٦٦٢**	١٨	٠.٦٧٤**	٢٤	٠.٧٢٦**
٤	٠.٥٨٧**	١٣	٠.٦٦٠**	١٩	٠.٦٢٧**	٢٥	٠.٧٩٦**
٥	٠.٤٧٣**	١٤	٠.٦٢٠**	٢٠	٠.٦٥٦**		
٦	٠.٤٣٠**	١٥	٠.٦٦٩**	٢١	٠.٦٤٠**		
٧	٠.٤٨٩**						
٨	٠.٤٦٢**						
٩	٠.٣٣١*						

** دال إحصائياً عند مستوى (٠.٠١) * دال إحصائياً عند مستوى (٠.٠٥)

يتضح من الجدول السابق أن جميع معاملات الارتباط بين درجة كل مفردة والدرجة الكلية للمستوى الذي تنتمي إليه المفردة (في حالة حذف درجة المفردة من الدرجة الكلية للمستوى) دالة إحصائياً؛ مما يدل على صدق جميع مفردات الاختبار.

- **حساب صدق المستويات الرئيسة للاختبار: تم حساب صدق مستويات الاختبار الرئيسة عن طريق حساب معاملات الارتباط بين درجة كل مستوى والدرجة الكلية للاختبار، وفق معامل ارتباط بيرسون؛ فوُجد أن معاملات الارتباط مرتفعة ودالة إحصائياً عند مستوى (٠.٠١)؛ مما يدل على صدق المستويات الرئيسة للاختبار، كما بالجدول التالي:**

جدول (٧)

يوضح معاملات الارتباط بين درجات المستويات الرئيسة والدرجة الكلية للاختبار:

م	مستويات عمق المعرفة الرياضية	معامل الارتباط	مستوى الدلالة
١	الإستدعاء والإسترجاع	٠.٥٥٥	٠.٠١
٢	المفاهيم والمهارات	٠.٩٥٤	٠.٠١
٣	التفكير الإستراتيجي	٠.٩٣٢	٠.٠١
٤	التفكير الممتد	٠.٩٢٤	٠.٠١

ج- زمن الاختبار: تم حساب الزمن اللازم للإجابة عن الاختبار من خلال حساب متوسط الأزمنة التي استغرقها جميع تلاميذ العينة الاستطلاعية في الإجابة عن مفردات الاختبار؛ وبناءً على ذلك اتضح أن الزمن اللازم للإجابة عن الاختبار هو (١١٠) دقيقة.

د- الصورة النهائية للاختبار[٦]: بعد الانتهاء من إجراءات ضبط الاختبار، أصبح الاختبار في صورته النهائية يتكون من (٢٥) مفردة موزعين على مستويات الاختبار كما بالجدول التالي:

جدول (٨)

توزيع مفردات الاختبار على مستويات عمق المعرفة:

م	مستويات عمق المعرفة	أرقام الأسئلة	عدد الأسئلة
١	مستوى الإستدعاء والإسترجاع	١ – ٢ – ٣ – ٤ – ٥ – ٦ – ٧ – ٨ – ٩	٩
٢	مستوى المفاهيم والمهارات	١٠ – ١١ – ١٢ – ١٣ – ١٤ – ١٥	٦
٣	مستوى التفكير الإستراتيجي	١٦ – ١٧ – ١٨ – ١٩ – ٢٠ – ٢١	٦
٤	مستوى التفكير الممتد	٢٢ – ٢٣ – ٢٤ – ٢٥	٤
	المجموع		٢٥

❖ اعداد اختبار الفهم العميق في الرياضيات؛ وذلك من خلال الخطوات التالية:

١. تحديد الهدف من الاختبار: يهدف الاختبار إلى قياس مدى امتلاك تلاميذ الصف السادس الإبتدائي لأبعاد الفهم العميق في الرياضيات.

[٦] ملحق (٦) اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية.

٢. **تحديد أبعاد الاختبار: في ضوء الإطلاع على العديد من الأدبيات والدراسات والبحوث السابقة التي تناولت الفهم العميق في الرياضيات مثل: دراسة Murphy (2016)، ودراسة آدم وعبدالحميد (٢٠١٧)، ودراسة زنقور (٢٠١٨)، ودراسة سيد (٢٠٢٢)، ودراسة محمد وآخرون (٢٠٢٣) ومن خلال تحليل محتوى وحدة "الهندسة والقياس"، تم تحديد أبعاد الفهم العميق المستهدف تنميتها لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي وهى: التفكير التوليدي (الطلاقة، المرونه، التعرف على الأخطاء والمغالطات) – طرح الأسئلة – التفسير – اتخاذ القرار.**

٣. **صياغة مفردات الاختبار: في ضوء الهدف من الاختبار، وفي ضوء ما أشارت إليه الدراسات والأدبيات السابقة التي تناولت أبعاد الفهم العميق، وبصفة خاصة في مجال تدريس الرياضيات، تمت صياغة مفردات الاختبار في ست محاور، بكل محور عدد من المفردات تسمح بإمكانية الاستدلال – من خلال استجابات التلاميذ لها – على أبعاد الفهم العميق في الرياضيات.**

وقد تم وضع مجموعة من تعليمات الاختبار ليسترشد بها التلميذ عند الإجابة، وروعي أن تكون سهلة وواضحة، وملائمة لمستوى تلاميذ المرحلة الإبتدائية.

٤. **تصحيح الاختبار وتقدير الدرجات: يوضح الجدول التالي طريقة حساب درجة الاختبار:**

جدول (٩)
توزيع مفردات ودرجات الاختبار على محاوره الأساسية:

م	أبعاد الفهم العميق	عدد المفردات	درجة كل مفردة	الدرجة العظمي للبعد
١	الطلاقة	٣	٣	٩
٢	المرونة	٣	٣	٩
٣	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٣	٣	٩
٤	طرح الأسئلة	٣	٣	٩
٥	التفسير	٣	٣	٩
٦	اتخاذ القرار	٣	٣	٩
	المجموع	١٨ مفردة		٥٤ درجة

٥. **صدق المحكمين: تم عرض الاختبار على مجموعة من المحكمين؛ لمعرفة آرائهم فيما يتعلق بمدى شمولية الاختبار لأبعاد الفهم العميق، ومدى ارتباط كل مفردة بالبعد الذي وضعت لقياسه، وسلامة الاختبار وصحته من حيث الصياغة والمضمون، ومناسبته**

لمستوى التلاميذ، وفي ضوء آراء المحكمين، تم إجراء التعديلات اللازمة على بعض مفردات الاختبار، كصياغة بعض المفردات لتكون أكثر وضوحًا للتلاميذ، كما تم إجراء تعديل في صياغة بعض المفردات لزيادة ارتباطها بالبعد الذي وضعت لقياسه.

٦. التجريب الاستطلاعي للاختبار: تم تطبيق الاختبار بصورته الأولية على العينة الاستطلاعية؛ وذلك بهدف تحديد ما يلي:

أ- حساب ثبات الاختبار: للتحقق من ثبات الاختبار تم اتباع الآتي:

- حساب معامل ألفا لـ كرونباخ Alpha-Cronbach لمفردات كل بعد على حدة (بعدد مفردات كل بعد)، وفي كل مرة يتم حذف درجات إحدى المفردات من الدرجة الكلية للبُعد، وأسفرت تلك الخطوة عن أن جميع المفردات ثابتة، إذ وُجد أن معامل ألفا لكل مفردة أقل من أو يساوي معامل ألفا العام للبعد الذي تنتمي إليه المفردة، والجدول التالي يوضح معاملات ثبات مفردات الاختبار:

جدول (١٠)

يوضح معاملات ثبات مفردات الاختبار

البعد	رقم المفردة	معامل ألفا	البعد	رقم المفردة	معامل ألفا	البعد	رقم المفردة	معامل ألفا
الطلاقة	١	٠.٧٥٤	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٧	٠.٧٢٤	التفسير	١٣	٠.٦٩٨
	٢	٠.٧٦٥		٨	٠.٧٢٤		١٤	٠.٧١٤
	٣	٠.٦٥٤		٩	٠.٦٥٤		١٥	٠.٦٩٨
معامل ألفا للبعد	٠.٧٧٤		معامل ألفا للبعد	٠.٧٣٥		معامل ألفا للبعد	٠.٧١٩	
المرونة	٤	٠.٦٥٨	طرح الأسئلة	١٠	٠.٧٢٥	اتخاذ القرار	١٦	٠.٧٦٠
	٥	٠.٧٠١		١١	٠.٧٣٥		١٧	٠.٧٨٩
	٦	٠.٦٦٨		١٢	٠.٧٢١		١٨	٠.٧٢١
معامل ألفا للبعد	٠.٧٠٧		معامل ألفا للبعد	٠.٧٤٨		معامل ألفا للبعد	٠.٧٩٠	

- حساب ثبات الأبعاد والثبات الكلي للإختبار عن طريق حساب معامل ألفا لـ كرونباخ؛ فوُجد أن معاملات ثبات الأبعاد والثبات الكلي للاختبار مرتفعة؛ مما يدل على الثبات الكلي للاختبار وثبات أبعاده، كما بالجدول التالي:

جدول (١١)

يوضح معاملات ثبات الأبعاد والثبات الكلي للاختبار.

م	أبعاد الاختبار	معامل ثبات ألفا لـ كرونباخ
١	الطلاقة	٠.٧٧٤
٢	المرونة	٠.٧٠٧
٣	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٠.٧٣٥
٤	طرح الأسئلة	٠.٧٤٨
٥	التفسير	٠.٧١٩
٦	اتخاذ القرار	٠.٧٩٠
	الفهم العميق ككل	٠.٨١٧

ب – حساب صدق الاختبار: لحساب صدق الاختبار تم إتباع الأتي:

- حساب صدق المفردات: تم حساب صدق مفردات الاختبار عن طريق حساب معامل ارتباط بيرسون بين درجة المفردة والدرجة الكلية للبعد الذي تنتمي إليه المفردة، في حالة حذف درجة المفردة من الدرجة الكلية للبعد، باعتبار أن بقية مفردات البعد محك للمفردة؛ والجدول التالي يوضح معاملات صدق مفردات الاختبار:

جدول (١٢)

يوضح معاملات صدق مفردات اختبار الفهم العميق في الرياضيات.

البعد	رقم المفردة	معامل الارتباط بالبُعد عند حذف درجة المفردة من البُعد	البعد	رقم المفردة	معامل الارتباط بالبُعد عند حذف درجة المفردة من البُعد	البعد	رقم المفردة	معامل الارتباط بالبُعد عند حذف درجة المفردة من البُعد
الطلاقة	١	**٠.٦١٦	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٧	**٠.٦٧٣	التفسير	١٣	**٠.٥٢٧
	٢	**٠.٤٩٠		٨	**٠.٥١٩		١٤	**٠.٥٢٢
	٣	**٠.٦٧٤		٩	**٠.٥٩٨		١٥	**٠.٥٦٠
المرونة	٤	**٠.٥٣٢	طرح الأسئلة	١٠	**٠.٥٩٥	اتخاذ القرار	١٦	**٠.٦٢٠
	٥	**٠.٦٣٢		١١	**٠.٥٦٧		١٧	**٠.٥٧٠
	٦	**٠.٥١٤		١٢	**٠.٦٦٢		١٨	**٠.٦٣٥

**** دال إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١)**

يتضح من الجدول السابق أن جميع معاملات الارتباط بين درجة كل مفردة والدرجة الكلية للبعد الذي تنتمي إليه المفردة (في حالة حذف درجة المفردة من الدرجة الكلية للبعد) دالة إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١)؛ مما يدل على صدق جميع مفردات الاختبار.

- **صدق الأبعاد: تم حساب صدق أبعاد الاختبار عن طريق حساب معاملات الارتباط بين درجة كل بعد والدرجة الكلية للاختبار، وفق معامل ارتباط بيرسون؛ فوُجد أن معاملات الارتباط مرتفعة ودالة إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١)؛ مما يدل على صدق أبعاد الاختبار، كما بالجدول التالي:**

جدول (١٣)

يوضح معاملات الارتباط بين درجات الأبعاد والدرجة الكلية للاختبار.

م	أبعاد الاختبار	معامل الارتباط
١	الطلاقة	٠.٧٨٣**
٢	المرونة	٠.٦٣٤**
٣	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٠.٥١٢**
٤	طرح الأسئلة	٠.٧٧٢**
٥	التفسير	٠.٦١٩**
٦	اتخاذ القرار	٠.٥٦٧**

**** دال إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١)**

ج- زمن الاختبار: تم حساب الزمن الازم للإجابة عن الاختبار من خلال حساب متوسط الأزمنة التي استغرقها جميع تلاميذ العينة الإستطلاعية في الإجابة عن مفردات الاختبار؛ وبناءً على ذلك اتضح أن الزمن اللازم للإجابة عن الاختبار هو (١٣٠) دقيقة.

د- الصورة النهائية للاختبار[٧]: بعد الإنتهاء من إجراءات ضبط الاختبار، أصبح الاختبار في صورته النهائية يتكون من (١٨) مفردة موزعين على أبعاد الاختبار كما بالجدول التالي:

[٧] ملحق (٧) اختبار الفهم العميق في الرياضيات.

جدول (١٤)
توزيع مفردات الاختبار على أبعاد الفهم العميق في الرياضيات.

م	أبعاد الاختبار	أرقام الأسئلة	عدد الأسئلة
١	الطلاقة	١ـ ٢ ـ٣	٣
٢	المرونة	٤ ــ ٥ ــ ٦	٣
٣	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٧ ــ ٨ ــ ٩	٣
٤	طرح الأسئلة	١٠ ــ ١١ ــ ١٢	٣
٥	التفسير	١٣ ــ ١٤ ــ ١٥	٣
٦	اتخاذ القرار	١٦ ــ ١٧ ــ ١٨	٣
	المجموع		١٨

سادسًا: التصميم التجريبي للبحث:

تم استخدام التصميم التجريبي ذي المجموعات المتكافئة، وذلك من خلال مجموعتين متكافئتين: مجموعة ضابطة تدرس بالطريقة العادية، ومجموعة تجريبية تدرس باستخدام الاستراتيجية المقترحة؛ وذلك للتحقق من فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ الصف السادس الإبتدائي.

سابعًا: اختيار عينة البحث: تم اختيار عينة البحث من تلاميذ الصف السادس الإبتدائي بمدرسة (الشهيد أحمد عبدالله الزقاقي) بإدارة ميت غمر التعليميه بمحافظة الدقهلية، وقد بلغ عدد أفراد العينة (٦٨) تلميذًا مقسمين إلى: مجموعة تجريبية: تتكون من (٣٣) تلميذًا، ومجموعة ضابطة: تتكون من (٣٥) تلميذًا.

ثامنًا: ضبط متغيرات البحث: تم التحقق من تكافؤ المجموعتين (الضابطة والتجريبية) فى المتغيرات الآتية:

١- العمر الزمنى: وذلك من خلال الاطلاع على بيانات التلاميذ بالمدرسية وجد أن العمر الزمني لتلاميذ العينة يتراوح ما بين (١١-١٢) سنة.

٢- المستوى الاقتصادي والاجتماعي: تم اختيار مجموعتي البحث من مدرسة واحدة؛ لذا فإن تلاميذ العينة ينتمون إلى بيئة اجتماعية واقتصادية واحدة.

٣- القائم بالتدريس: قام أحد معلمي الرياضيات بالمدرسة بالتدريس للمجموعة التجريبية باستخدام الاستراتيجية المقترحة، ومعلم آخر بالتدريس للمجموعة الضابطة باستخدام الطريقة العادية، وقد روعي أن يكونا حاصلين على نفس المؤهل، ولهما نفس سنوات الخبرة؛ وذلك بهدف ضبط المتغير الخاص بالمعلم.

٤- مستويات عمق المعرفة الرياضية: تم تطبيق اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية قبليًا على عينة البحث ككل (المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة)؛ وذلك للتحقق من تكافؤ المجموعتين؛ وذلك بحساب قيمة (ت) بين متوسطي درجات التطبيق القبلي لمجموعتي البحث لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية، والجدول التالي يوضح ذلك:

جدول (١٥)

يوضح دلالة الفرق بين متوسطي درجات تلاميذ المجوعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق القبلي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية.

م	مستويات عمق المعرفة الرياضية	المجموعة الضابطة ن = (٣٥)		المجموعة التجريبية ن = (٣٣)		قيمة (ت)	مستوى الدلالة د.ح = ٦٦
		المتوسط (م)	الانحراف المعياري (ع)	المتوسط (م)	الانحراف المعياري (ع)		
١	الإستدعاء والإسترجاع	٤.٤٦	١.٤٢١	٤.٤٢	١.١٧٣	-٠.١٠٤	٠.٩١٨ غير دالة
٢	المفاهيم والمهارات	٢.٥٩	٠.٩٣٢	٢.٩١	١.٠١١	٠.٠٩٩	٠.٩٢١ غير دالة
٣	التفكير الإستراتيجي	٢.٧١	١.١٥٢	٢.٨٨	١٦٦.١	٠.٥٨٥	٠.٥٦١ غير دالة
٤	التفكير الممتد	٢.٠٦	٠.٩٣٨	٢.٠٣	٠.٩٨٤	-٠.١١٥	٠.٩٠٩ غير دالة
	مستويات عمق المعرفة ككل	١٢.١١	٢.٤١٠	١٢.٢٤	١.٩٦٩	٠.٢٣٩	٠.٨١٢ غير دالة

يتضح من الجدول أنه لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق القبلي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية؛ حيث كانت قيم (ت) غير دالة عند مستوى ٠,٠٥، مما يدل على تجانس المجموعتين التجريبية والضابطة في مستويات عمق المعرفة الرياضية.

٥- الفهم العميق في الرياضيات: تم تطبيق اختبار الفهم العميق في الرياضيات قبليًا على عينة البحث ككل (المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة)، ثم حساب قيمة (ت) بين متوسطي درجات التطبيق القبلي لمجموعتي البحث لاختبار الفهم العميق في الرياضيات، والجدول التالي يوضح ذلك:

جدول (١٦)

يوضح دلالة الفرق بين متوسطي درجات تلاميذ المجوعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق القبلي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات.

م	المهارة	المجموعة الضابطة ن = (٣٥)		المجموعة التجريبية ن = (٣٣)		قيمة (ت)	مستوى الدلاله د.ح = ٦٦
		المتوسط (م)	الانحراف المعياري (ع)	المتوسط (م)	الانحراف المعياري (ع)		
١	الطلاقة	٢.٠٣	١.٠٧١	٢.١٢	١.٠٥٣	٠.٣٥٩	٠.٧٢٠ غير دالة
٢	المرونة	٢.١٧	١.١٥٠	١.٨٨	٠.٩١٩	-١.٢٠٢	٠.٢٣٤ غير دالة
٣	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٢.٠٣	٠.٨٥٧	٢.٣٠	٠.٨٨٣	١.٣٠٠	٠.١.٩٨ غير دالة
٤	طرح الأسئلة	٢.١٧	١.٠٩٨	٢.١٨	١.١٠٣	٠.٠٣٩	٠.٩٦٩ غير دالة
٥	التفسير	١.٨٠	٠.٨٨٣	٢.١٢	٠.٨٥٧	١.٥٦٧	٠.١٢٢ غير دالة
٦	اتخاذ القرار	٢.٢٨	١.١٠٧	٢.٢١	٠.٨٥٧	-٠.٣٢٢	٠.٧٤٩ غير دالة
	الفهم العميق ككل	١٢.٤٩	٢.١٦١	١٢.٨٢	٢.١٤٣	٠.٦٣٧	٠.٥٢٧ غير دالة

يتضح من الجدول أنه لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق القبلي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات؛ حيث كانت قيم (ت) غير دالة عند مستوى ٠,٠٥، مما يدل على تجانس المجموعتين التجريبية والضابطة في درجة الفهم العميق في الرياضيات.

تاسعًا: تنفيذ تجربة البحث:

بعد الانتهاء من التطبيق القبلي لأداتي البحث والتأكد من تكافؤ المجموعتين، تم الالتقاء بمعلم الرياضيات للمجموعة التجريبية؛ لتدريبة على كيفية تدريس الوحدة الدراسية بالإستعانة بدليل المعلم المعُد في ضوء الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي، وعلى كيفية استخدام أوراق عمل التلميذ، وتم تجهيز الوسائل التعليمية والأدوات التي سوف يتم الاستعانة بها وتسليمها للمعلم قبل تنفيذ تجربة البحث، كما تم حضور بعض الحصص مع تلاميذ المجموعة التجريبية؛ لشرح الهدف من تجربة البحث.

عاشراً : التطبيق البعدي والتتبعي لأداتي البحث :

بعد الانتهاء من التدريس لمجموعتي البحث (التجريبية والضابطة)، تم تطبيق أداتي البحث (اختبار مستويات عمق المعرفة، والفهم العميق في الرياضيات) بعديًا على مجموعتي البحث فى نفس الوقت، وبعد مرور أسبوعين تقريبًا تم التطبيق التتبعي لأداتي البحث على تلاميذ المجموعة التجريبية، ومن ثم تم التصحيح، ورصد الدرجات لمعالجتها إحصائياً وتفسير النتائج، وتقديم التوصيات والمقترحات.

حادي عشر : نتائج البحث، وتفسير دلالتها التربوية :

١- لاختبار صحة الفرض الأول الذي ينص على أنه: " لا يوجد فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) في التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة)"، تم استخدام اختبار "ت" (T-test) للعينتين المستقلتين لدراسة الفروق بين متوسطي درجات المجموعتين (التجريبية والضابطة)، كما تم استخدام مربع إيتا (η^2) لحساب حجم التأثير الناتج؛ وتم التوصل إلى النتائج الموضحة في الجدول التالى:

جدول (١٧)

قيمة (ت) لدلالة الفروق بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة ككل (ولكل مستوى على حدة)، وكذلك قيم مربع ايتا، وحجم التأثير.

مستويات عمق المعرفة الرياضية	المجموعة الضابطة ن = (٣٥)		المجموعة التجريبية ن = (٣٣)		(د.ح)	قيمة (ت)	مربع ايتا	حجم التأثير (d)
	م	ع	م	ع				
الإستدعاء والإسترجاع	٤.٢٣	١.٣٣٠	٨.٥٢	٠.٨٧٠	٦٦	**١٥.٦٢١	٠.٧٨٧	٣.٨٤٤
المفاهيم والمهارات	٣.٥٤	١.٦١٢	١٠.٢١	١.٠٢٣	٦٦	**٢٠.٢٠٠	٠.٨٦٠	٤.٩٥٦
التفكير الإستراتيجي	٣.٤٩	١.٦١٦	١٠.١٥	٠.٨٣٤	٦٦	**٢١.١٨٥	٠.٨٧١	٥.١٩٧
التفكير الممتد	٣.٠٦	١.٩٢٤	٩.٦٧	١.٥٥٥	٦٦	**١٥.٥٢٤	٠.٧٨٥	٣.٨٢٢
عمق المعرفة الرياضية ككل	١٤.٣١	٥.٣٦٨	٣٨.٥٥	٢.٥٥١	٦٦	**٢٣.٥٤١	٠.٨٩٣	٥.٧٧٧

**** دال إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١)**

يتضح من الجدول السابق ما يلي:

- **وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية ودرجات تلاميذ المجموعة الضابطة فى التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة) وذلك لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية؛ حيث كانت جميع قيم (ت) دالة إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١).**
- **تشير قيم مربع إيتا – التي امتدت من (٠.٧٨٥) إلى (٠.٨٩٣) – إلى وجود قوة تأثير كبيرة للاستراتيجية المقترحة في جميع المستويات والدرجة الكلية للاختبار.**
- **إرتفاع قيم حجم التأثير(d) – التي امتدت من (٣.٨٢٢) إلى (٥.٧٧٧)– والتي تشير إلى أن التدريس باستخدام الاستراتيجية المقترحة كان له حجم تأثير كبير جدًا في تنمية جميع مستويات عمق المعرفة الرياضية وفي الاختبار ككل.**

في ضوء ذلك يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل الذي ينص على أنه: " يوجد فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة) لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية".

٢– للتحقق من صحة الفرض الثاني والذي ينص على أنه: " لا توجد فاعلية للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية"، تم استخدام اختبار "ت" (T–test) للعينتين المرتبطتين لدراسة الفروق بين متوسطات التطبيقين (البعدي والتتبعي) لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية؛ وتم التوصل إلى النتائج الموضحة في الجدول التالي:

جدول (١٨)

نتائج اختبار(ت) للمجموعة التجريبية في التطبيقين (البعدي والتتبعي) لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية.

	مستويات عمق المعرفة	تطبيق بعدي		تطبيق تتبعي		قيمة (ت)	مستوى الدلالة (د.ح)= ٣٢
		م	ع	م	ع		
١	الاستدعاء والاسترجاع	٨.٥٢	٠.٨٧٠	٨.٥٢	٠.٨٧٠	١.٠٧٠	٠.٢٩٣ غير دالة
٢	المفاهيم والمهارات	١٠.٢١	١.٠٢٣	١٠.٤٨	١.٣٠٢	-١.٠٤١	٠.٣٠٦ غير دالة
٣	التفكير الاستراتيجي	١٠.١٥	٠.٨٣٤	١٠.٢٤	٠.٨٦٧	-٠.٤٠٧	٠.٣٦٨٧ غير دالة
٤	التفكير الممتد	٩.٦٧	١.٥٥٥	٩.٥٧	١.٥٤٢	٠.٣٠٧	٠.٧٦١ غير دالة
	عمق المعرفة الرياضية ككل	٣٨.٥٥	٢.٥٥١	٣٨.٥٢	٢.٤٥١	٠.٠٥٥	٠.٩٥٧ غير دالة

يتضح من الجدول السابق وجود فرق غير دال احصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية، في التطبيقين (البعدي والتتبعي) في جميع المستويات والدرجة الكلية للاختبار، مما يدل على بقاء واستمرار فاعلية الاستراتيجية المقترحة إلى التطبيق التتبعي؛ وبالتالي فالاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي فعالة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

كما تم أيضًا التحقق من فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل ولكل مستوى على حده لدى تلاميذ المجموعة التجريبية؛ من خلال حساب نسبة الكسب المعدلة لـ بلاك، ونسبة الكسب المصححة لـ عزت، وتم التوصل إلى النتائج الموضحة بالجدول التالي:

جدول (١٩)

نسب الكسب المعدلة والمصححة للتحقق من فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل ولكل مستوى على حده.

م	مستويات عمق المعرفة الرياضية	المتوسط القبلي	المتوسط البعدي	الدرجة العظمى	نسبة الكسب المعدله لـ بلاك	نسبة الكسب المصححة لـ عزت
١	الاستدعاء والاسترجاع	٤.٤٢	٨.٥٢	٩	١.٣٥	١.٨٣
٢	المفاهيم والمهارات	٢.٩١	١٠.٢١	١٢	١.٤١	٢.١٣
٣	التفكير الاستراتيجي	٢.٨٨	١٠.١٥	١٢	١.٤٠	٢.١١
٤	التفكير الممتد	٢.٠٣	٩.٦٧	١٢	١.٤٠	٢.١٩
	الاختبار ككل	١٢.٢٤	٣٨.٥٥	٤٥	١.٣٨	٢.٠٦

يتضح من هذا الجدول أن: جميع قيم نسب الكسب المعدلة لـ بلاك أكبر من القيمة (١.٢) وهى القيمة التي اقترحها بلاك للحكم على الفاعلية، كما أن جميع قيم نسب الكسب المصححة لـ عزت أكبر من القيمة (١.٨) وهى القيمة التي أقترحها عزت للحكم على الفاعلية؛ وهذا يشير إلى فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حده).

وعلى وجه العموم من اجمالي البيانات الموضحة في الجدولين (١٨)، (١٩)؛ يتم رفض الفرض الثاني، وقبول الفرض البديل الذي ينص على أنه: " توجد فاعلية للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية ".

٣- لإختبار صحة الفرض الثالث الذي ينص على أنه: "لا يوجد فرق دال إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) فى التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة)"، تم استخدام اختبار "ت" (T-test) للعينتين المستقلتين لدراسة الفروق بين متوسطي درجات المجموعتين (التجريبية والضابطة)، كما تم استخدام مربع إيتا (η^2) لحساب حجم التأثير الناتج؛ وتم التوصل إلى النتائج الموضحة في الجدول التالى:

جدول (٢٠)

قيمة (ت) لدلالة الفروق بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق ككل (ولكل بعد من أبعاد الفهم العميق على حدة)، وكذلك قيم مربع ايتا، وحجم التأثير.

أبعاد الفهم العميق في الرياضيات	المجموعة الضابطة ن = (٣٥)		المجموعة التجريبية ن = (٣٣)		(د.ح)	قيمة (ت)	مربع ايتا	حجم التأثير (d)
	م	ع	م	ع				
الطلاقة	٣.١١	٢.٠٥٥	٧.٣٠	١.٢٨٧	٦٦	**١٠.٠٠٥	٠.٦٠	٢.٤٤٩
المرونة	٣.٢٦	٢.٠١٩	٧.١٨	١.١٠٣	٦٦	**٩.٨٦٠	٠.٥٩٥	٢.٤٢٤
التعرف على الأخطاء والمغالطات	٣.١٧	١.٨٨٦	٧.٢١	١.٢٦٩	٦٦	**١٠.٣٠١	٠.٦١٦	٢.٥٣٣
طرح الأسئلة	٣.١١	٢.٠٤٠	٧.٥٥	١.٠٣٣	٦٦	**١١.١٩٢	٠.٦٥٤	٢.٧٤
التفسير	٢.٩٤	٢.١٢٧	٧.٠٦	١.١٤٤	٦٦	**٩.٨٥٤	٠.٥٩٥	٢.٤٢
اتخاذ القرار	٣.١١	٢.٠٢٦	٧.٢١	١.٥١٦	٦٦	**٩.٤٠٠	٠.٥٧٢	٢.٣١
الفهم العميق ككل	١٨.٧١	١٠.٨٧٨	٤٣.٥٢	٣.٣١٨	٦٦	**١٢.٥٥٤	٠.٧٠٤	٣.٠٨

** دال إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١)

يتضح من الجدول السابق ما يلي:

- **وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية ودرجات تلاميذ المجموعة الضابطة فى التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة) وذلك لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية؛ حيث كانت جميع قيم (ت) دالة إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١).**
- **تشير قيم مربع إيتا – التي امتدت من (٠.٥٧٢) إلى (٠.٧٠٤) – إلى وجود حجم تأثير كبير في جميع الأبعاد والدرجة الكلية للاختبار.**
- **إرتفاع قيم حجم التأثير(d) – التي امتدت من (٢.٣١) إلى (٣.٠٨) – والتي تشير إلى أن التدريس باستخدام الاستراتيجية المقترحة له حجم تأثير كبير في جميع الأبعاد وفي الاختبار ككل.**

في ضوء ذلك يتم رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل الذي ينص على أنه: " يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين (التجريبية والضابطة) فى

التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد من أبعاد الفهم العميق على حدة) لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية".

٤- للتحقق من صحة الفرض الرابع والذي ينص على أنه: "لا توجد فاعلية للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد من أبعاد الفهم العميق على حدة) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية"، تم استخدام اختبار "ت" (T–test) للعينتين المرتبطتين لدراسة الفروق بين متوسطات التطبيقين (البعدي والتتبعي) لاختبار أبعاد الفهم العميق في الرياضيات؛ وتم التوصل إلى النتائج الموضحة في الجدول التالي:

جدول (٢١)

نتائج اختبار(ت) للمجموعة التجريبية في التطبيقين (البعدي والتتبعي) لاختبار الفهم العميق في الرياضيات.

	أبعاد الفهم العميق في الرياضيات	تطبيق بعدي		تطبيق تتبعي		قيمة (ت)	مستوى الدلالة (د.ح)= ٣٢
		م	ع	م	ع		
١	الطلاقة	٧.٣٠	١.٢٨٧	٧.٠٦	١.٣٦٨	٠.٧٣١	٠.٤٧٠ غير دالة
٢	المرونة	٧.١٨	١.١٠٣	٧.١٢	١.٣٨٦	٠.١٧٤	٠.٨٦٣ غير دالة
٣	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٧.٢١	١.٢٦٩	٧.٣٣	١.١٣٦	-٠.٣٩٥	٠.٦٩٦ غير دالة
٤	طرح الأسئلة	٧.٥٥	١.٠٣٣	٧.٢٤	١.٢٢٦	١.٠٤٤	٠.٣٠٤ غير دالة
٥	التفسير	٧.٠٦	١.١٤٤	٧.٤٢	١.٥٠١	-١.٠٠٧	٠.٣٢١ غير دالة
٦	اتخاذ القرار	٧.٢١	١.٥١٦	٧.٠٩	١.٥٠٨	٠.٨٩٢	٠.٣٧٩ غير دالة
	الفهم العميق في الرياضيات	٤٣.٥٢	٣.٣١٨	٤٣.٢٧	٢.٧٦٤	٠.٣٦٦	٠.٧١٧ غير دالة

يتضح من الجدول السابق وجود فرق غير دال احصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية، في التطبيقين (البعدي والتتبعي) في جميع الأبعاد والدرجة الكلية للاختبار؛ مما يدل على بقاء واستمرار فاعلية الاستراتيجية المقترحة إلى التطبيق التتبعي، وبالتالي فالاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي فعالة في تنمية التفكير الفهم العميق في الرياضيات كقدرة كلية أو كقدرات فرعية لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

كما تم أيضًا حساب نسبة الكسب المعدلة لـ بلاك، ونسبة الكسب المصححة لـ عزت؛ للتحقق من فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية أبعاد الفهم العميق في الرياضيات ككل ولكل بعد على حده لدى تلاميذ المجموعة التجريبية؛ وتم التوصل إلى النتائج الموضحة بالجدول التالي:

جدول (٢٢)

نسب الكسب المعدلة والمصححة للتحقق من فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية أبعاد الفهم العميق في الرياضيات ككل ولكل بعد على حده

م	أبعاد الفهم العميق في الرياضيات	المتوسط القبلي	المتوسط البعدي	الدرجة العظمى	نسبة الكسب المعدله لـ بلاك	نسبة الكسب المصححة لـ عزت
١	الطلاقة	٢.١٢	٧.٣٠	٩	١.٣٢	٢.٠٤
٢	المرونة	١.٨٨	٧.١٨	٩	١.٣٣	٢.٠٧
٣	التعرف على الأخطاء والمغالطات	٢.٣٠	٧.٢١	٩	١.٢٨	١.٩٦
٤	طرح الأسئلة	٢.١٨	٧.٥٥	٩	١.٣٨	٢.٠٩
٥	التفسير	٢.١٢	٧.٠٦	٩	١.٢٧	١.٩٧
٦	اتخاذ القرار	٢.٢١	٧.٢١	٩	١.٢٩	١.٩٩
	الاختبار ككل	١٢.٨٢	٤٣.٥٢	٥٤	١.٣١	٢.٠٢

يتضح من هذا الجدول أن: جميع قيم نسب الكسب المعدلة لـ بلاك أكبر من القيمة (١.٢) التي حددها بلاك، كما أن جميع قيم نسب الكسب المصححة لـ عزت أكبر من القيمة (١.٨) وهى القيمة التي أقترحها عزت للحكم على الفاعلية؛ مما يدل على فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية أبعاد الفهم العميق في الرياضيات.

ومن النتائج الموضحة في الجدولين (٢١)، (٢٢)؛ يتم رفض الفرض الرابع، وقبول الفرض البديل الذي ينص على أنه: " توجد فاعلية للاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية أبعاد الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية".

٥- للتحقق من صحة الفرض الخامس والذي ينص على أنه: "لا توجد علاقة دالة إحصائيًا بين درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق البعدي لاختبار

مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى على حدة) ودرجاتهم في التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة)

تم حساب معامل ارتباط بيرسون بين درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية، ودرجاتهم في التطبيق البعدي لاختبار أبعاد الفهم العميق في الرياضيات؛ وتم التوصل إلى النتائج الموضحة في الجدول التالى:

جدول (٢٣)

معاملات الارتباط بين بين درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية، ودرجاتهم في التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في.

المتغير	مستوى الاستدعاء والاسترجاع	مستوى المفاهيم والمهارات	مستوى التفكير الاستراتيجي	مستوى التفكير الممتد	عمق المعرفة الرياضية ككل
الطلاقة	٠.٧٥٧**	٠.٥٤٨**	٠.٦٢٥**	٠.٥٧٨**	٠.٦٢١**
المرونة	٠.٧٤٢**	٠.٣٦٥**	٠.٣٦٥**	٠.٦٥٩**	٠.٥٩٨**
التعرف على الأخطاء والمغالطات	٠.٨٢٥**	٠.٥٤٢**	٠.٣٩٥**	٠.٧٤٨**	٠.٧٤٥**
طرح الأسئلة	٠.٧٢١**	٠.٧٢٤**	٠.٣٨٧**	٠.٤٢٩**	٠.٤٢١**
التفسير	٠.٨٥٤**	٠.٧١٢**	٠.٤١٢**	٠.٦٣٥**	٠.٧٢٥**
اتخاذ القرار	٠.٧٨١**	٠.٦٩٨**	٠.٤٢٥**	٠.٣٦٨**	٠.٦٩٨**
الفهم العميق في الرياضيات ككل	٠.٨٥٢**	٠.٦٩٨**	٠.٥٢١**	٠.٦٥٩**	٠.٧٣١**

** دال إحصائيًا عند مستوى (٠.٠١)

يتضح من الجدول السابق وجود ارتباط موجب دال احصائياً عند مستوى (٠.٠١) بين درجات اختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية (لكل مستوى على حدة)، ودرجات اختبار أبعاد الفهم العميق في الرياضيات (لكل بعد على حدة) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية، كما يتضح وجود ارتباط موجب قوى قيمته (٠.٧٣١) دال احصائيًا عند مستوى (٠.٠١) بين درجات اختبار مستويات عمق المعرفة ككل ودرجات اختبار أبعاد الفهم العميق ككل؛ أي أنه كلما ارتفعت مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى التلاميذ كلما زادت قدرتهم على الفهم العميق في الرياضيات؛ وبالتالي يتم يتم رفض الفرض الخامس، وقبول الفرض البديل الذي ينص على أنه: "توجد علاقة دالة إحصائيًا بين درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق البعدي لاختبار مستويات عمق المعرفة الرياضية ككل (ولكل مستوى

على حدة) ودرجاتهم في التطبيق البعدي لاختبار الفهم العميق في الرياضيات ككل (ولكل بعد على حدة)".

ثاني عشر: مناقشة النتائج:

أولاً: مناقشة النتائج الخاصة بمستويات عمق المعرفة الرياضية:

- **أوضحت نتائج البحث أن: الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي فعالة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية (كقدرة كلية أو كقدرات فرعية) لدى التلاميذ؛ ويمكن إرجاع هذه النتيجة إلى الأسباب التالية:**

- ✓ **مرحلة البناء المعرفي في الاستراتيجية المقترحة التي يقوم فيها المعلم بعرض المعرفة وآليات حل المشكلات المختلفة عن طريق النمذجة والعرض العملى، ومراقبة المتعلمين للمعلم وقيامهم بجمع المعرفة وفهمها والبناء عليها؛ كل ذلك ساعد التلاميذ على اكتساب المفاهيم والحقائق والمهارات والاجراءات الرياضية بصورة جيدة بجانب القدرة على استرجاع واستدعاء المعرفة والمعلومات التي سبق تعلمها في حل المسائل والمشكلات الرياضية.**
- ✓ **تنظيم الدرس في صورة مشكلات ومهام تعليمية حقيقية ذات معنى بالنسبة للتلاميذ، وحثهم على تطبيق المعرفة والمفاهيم التي تم اكتسابها واستخدامها في تنفيذ المهام التعليمية وحل المشكلات الرياضية المطروحة؛ ساعدهم على بناء المعرفة بأنفسهم، وعلى فهم ما يتعلموه من خلال الاكتشاف والمناقشة والتفاوض في وسط اجتماعي تعاوني آمن، ويتفق هذا مع ما أشارت إليه دراسة الحنفي (٢٠٢٢، ٣٦) على أنه كلما إندمج المتعلم مع بيئة التعلم، كلما تمكن من مستويات المعرفة الأكثر عمقًا، فعمق المعرفة الرياضية يحتاج لكي ينمو إلى بيئة تعلم آمنة خالية من التوتر والقلق، تقبل فيها الأفكار، وتقر بالأخطاء.**
- ✓ **الانشطة والمهام المتنوعة والمختلفة التي توفرها الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي، والتي تتطلب من التلميذ أفكارًا وحلولاً متعددة ومتنوعة؛ ساعدت التلاميذ على التخطيط الجيد قبل تنفيذ المهام، ومكنتهم من اختيار الاستراتيجيات المناسبة لتنفيذ المهام؛ مما نمى لديهم مستوى التفكير الاستراتيجي.**

- ✓ **مرحلة التطور المعرفي في الاستراتيجية المقترحة هيئت للتلميذ مناخ تعليمي يساعده على ممارسة عمليات ذهنية متنوعة؛ من خلال طرح مهمات تعليمية ومواقف مختلفة ومتنوعة يطبق عليها التلميذ المعرفة التي اكتسبها في بيئات مختلفة وعلى نطاق واسع وفي سياقات متنوعة؛ مما يؤدي به إلى اتقان المفاهيم والمهارات الرياضية، وتنمية قدرته على التفكير الممتد.**
- ✓ **احتواء أوراق عمل التلميذ في كل درس على أنشطة متنوعة تتطلب أفكارًا وحلولاً متعددة، أتاح للتلاميذ فرصة إعادة تقييم معرفتهم بالمفاهيم والتعميمات والمهارات الرياضية، والقدرة على صياغة تلك المعرفة في صورة جديدة، وتطبيقها في مواقف رياضية مختلفة؛ مما أدى إلى تنمية مستويات عمق المعرفة لديهم.**
- ✓ **تركز الاستراتيجية المقترحة على الدور النشط للتلميذ، وتمنحه الفرصة لاستخدام خبراته السابقة، وتطوير تفكيره من خلال ممارستة التفكير التشاركي أثناء حل المشكلات الرياضية في مجموعات تقوم على التعاون والتفاعل ومشاركة التلاميذ في المناقشات من خلال مقارنة حلولهم مع حلول زملائهم، والحوار حول الحلول المختلفة والحكم؛ مما ساعد على تنمية عمليات التفكير العليا لديهم مثل التحليل، والتركيب، والتأمل والتقييم وتعديل الأخطاء ؛ مما ساهم في تنمية عمق المعرفة لديهم.**
- ✓ **ساعدت الاستراتيجية المقترحة في تعزيز مهارات التفكير العليا لدى التلاميذ من خلال التحفيز وإشراك المتعلمين في أنشطة حقيقية ، وتعزيز مهارات ما وراء المعرفة، وفهم الطريقة التي كان يفكر بها الطلاب وتقديم ملاحظات فورية لتوجيه التلاميذ ودعمهم، والتوازن بين تقديم المساعدة والتراجع عن عمد كان مهمًا أيضًا في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى التلاميذ.**

في ضوء ما سبق يمكن القول أن الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي فعالة في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى التلاميذ، وتتفق هذه النتيجة مع نتائج بعض الدراسات السابقة كدراسة Baer (2016)، ودراسة حسن (٢٠١٨)، ودراسة الرفاعي (٢٠١٩)، ودراسة عبدالرحيم (٢٠٢٠)، ودراسة Al-Saadi and Al-Kinani (2021)؛ حيث أكدت نتائج هذا الدراسات على فاعلية استخدام نماذج النظرية

البنائية في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين في مراحل تعليمية مختلفة.

كما تتفق هذه النتيجة أيضًا مع الدراسات السابقة التي أثبتت فاعلية استخدام نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي في تدريس الرياضيات، وأثبتت آثارهم الإيجابية على نواتج التعلم كدراسة كل من المشهداني والشمري (٢٠١٧)، ودراسة فايز محمد (٢٠١٩)، ودراسة Rinaldi and Afriansyah (2019) ، ودراسة Eze et al. (2020) ، ودراسة الشوحة (٢٠٢٠)، ودراسة الحنان (٢٠٢١)، ودراسة Adnan (2021) ، ودراسة Pristel et al. (2022)، ودراسة Lo and Tsai (2022) ، ودراسة Yulianti, et al. (2022).

ثانيًا: مناقشة النتائج الخاصة بأبعاد الفهم العميق في الرياضيات:

- أوضحت نتائج البحث أن: استخدام الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي أثناء تدريس الرياضيات فعال في تنمية الفهم العميق في الرياضيات (كقدرة كلية أو كقدرات فرعية) مقارنةً بالطريقة العادية؛ ويمكن إرجاع هذه النتيجة إلى الأسباب التالية:

- ✓ يمكن ارجاع فاعلية الاستراتيجية المقترحة في تنمية أبعاد الفهم العميق إلى أساسها النظري الذي يعتمد على النظرية البنائية، حيث تعتمد على جعل المتعلم هو محورالعملية التعليمية، وتهتم بإشراكه في عملية التعلم، واعتماده على العمليات المعرفية الادراكية وما وراء المعرفية؛ لبناء المعرفة بنفسه، كما ان ذلك يساعده في تنمية مهارات حل المشكلات واتخاذ القرار؛ مما ينمى لديه أبعاد الفهم بشكل عام وأبعاد الفهم الرياضي العميق بشكل خاص.
- ✓ وفرت الاستراتيجية المقترحة العديد من المهام المختلفة في صورة مشكلات واقعية حثت التلاميذ على البحث والتجريب، والقيام بالأنشطة الإستقصائية، وطرح الأسئلة، والتفكير المنطقي؛ للتوصل إلى حل المشكلات الرياضية المطلوب حلها، كل ذلك شجعهم على التفكير بشكل غير مألوف، وتتطلب منهم التفكير والفهم العميق، ويتفق هذا مع ما أكدت عليه دراسة Ali (2019, 75) على أن التعلم المستند إلى المشكلات يحفز المتعلمين على التعلم العميق، وعلى التعلم من أجل الفهم والبحث عن المعنى وعلى القدرة على

التعبير عن أفكارهم بطريقة أفضل، وتحسين مفاهيمهم ؛ فهو يقدم طريقة جديدة في التفكير والتعلم تؤدي إلى زيادة نشاطهم، وزيادة الثقة والمسؤولية أثناء التعلم.

- ✓ **وفرت الاستراتيجية المقترحة بيئة تعلم آمنة وأنشطة تعليمية مشوقة، واتاحت جو من الحرية والمشاركة الفعالة في العملية التعليمية للاتيان بالافكار الجديدة، والتعبير عن الآراء والأفكارفى جو بعيد عن النقد، والاستفادة من أفكار الأخرين من خلال تطويرها والبناء عليها؛ مما أسهم في توسيع وتعميق فهم التلاميذ لجوانب التعلم المختلفة؛ مما زاد من قدرتهم على الفهم العميق للمشكلة الرياضية.**
- ✓ **الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي ساعدت التلاميذ على استنتاج واستنباط المعرفة الرياضية، وتحقيق الترابط بين المعارف السابقة واللاحقة بالإضافة إلى وضع الافتراضات اللازمة لفهم المحتوى الرياضي والعلاقات بين أجزائه؛ من خلال مرور المتعلم بمشكلات ومواقف واقعية تتطلب منه المواجهة والتفكير في ايجاد الحلول لها، كل ذلك ساعد على تنمية وتنشيط مهارات التفكير المختلفة بشكل عام وأبعاد الفهم العميق بشكل خاص لذى التلاميذ.**
- ✓ **ساعدت الاستراتيجية المقترحة على توفير بيئة تعلم نشطة للمتعلمين تسمح لهم بتحليل المفاهيم والربط بين المفاهيم والمهارات والتعميمات الرياضية بروابط ذهنية وعمل اتصالات جديدة بين الأفكار، وترجمتها من صورة لأخرى أثناء التعلم للوصول إلى معلومات جديدة ودمجها مع المعلومات السابقة مما يعزز لديهم مهارات التفكير العليا ويؤدى إلى التعمق في الفهم.**
- ✓ **اسلوب الحوار بين المعلم والمتعلمين في خطوة بناء المعرفة القائمة على النمذجة، وبين المتعلمين بعضهم البعض في جميع مراحل الاستراتيجية المقترحه، ساعد في الحصول على فهم أعمق.**
- ✓ **تعلم التلاميذ في مجموعات ومساعدة بعضهم البعض أتاح فرصًا أمامهم لطرح الأسئلة والحوار وإجرا المناقشات من خلال مجموعات العمل؛ مما ساهم في تبادل المعلومات والخبرات وتشجيع التلاميذ على حرية التعبير عن الأفكار والآراء، ومناقشة، ونقد، وتبرير، وتفسير الأفكار والحلول المطروحة، والبحث عن أكثر من بديل لحل المشكلة**

الرياضية والقدرة على اختيار أفضل حل، وتقديم التفسيرات والحجج المناسبة، كل ذلك يتيح فرصًا للتفاعل الإيجابي مع المادة ويعطي التلاميذ الفرصة لتطوير تفكيرهم بعمق.

كل ما سبق كان سببًا في تحقيق فاعلية الاستراتيجية المقترحة القائمة على نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي في تنمية أبعاد الفهم العميق لدى التلاميذ، وتتفق هذه النتيجة مع نتائج بعض الدراسات السابقة التى أكدت على فاعلية نماذج النظرية البنائية في تنمية أبعاد الفهم العميق لدى المتعلمين كدراسة دراسة أحمد (٢٠٢٠)، ودراسة الحنان (٢٠٢٠)، ودراسة Pristel, et al. (2022)، وبعض الدراسات السابقة التي أكدت فاعلية استخدام نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي في تدريس الرياضيات، وأثبتت آثارهما الإيجابية على نواتج التعلم المختلفة كدراسة البلوي والصمادي (٢٠١٧)، ودراسة كل من خير الله، ودريع (٢٠١٩)، ودراسة Apriliana et al. (2019)، ودراسة الجندي (٢٠٢٠)، ودراسة Shobirin et al, (2021) ، ودراسة Gusnur (2021)، ودراسة سعد (٢٠٢٢)، ودراسة Pinto and Zvacek (2022).

ثالثًا: مناقشة النتائج الخاصة بالعلاقة بين مستويات عمق المعرفة وأبعاد الفهم العميق في الرياضيات:

- كشفت النتائج وجود علاقة ارتباطية موجبة بين درجات اختبار مستويات عمق المعرفة في التطبيق البعدي ودرجات اختبار أبعاد الفهم العميق في التطبيق البعدي لدى تلاميذ المجموعة التجريبية؛ أي أنه كلما ارتفعت مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى التلاميذ كلما زادت قدرتهم على الفهم العميق في الرياضيات؛ ويمكن ارجاع هذه النتيجة إلى أن:
- ✓ كلما تعمقت المعرفة الرياضية التي يمتلكها المتعلم، كلما أصبحت عمليات الفهم أكثر عمقًا؛ حيث ان تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلم تساعده في تنظيم عملية تعلمه، وفي بناء الخبرات، وتنمي لديه القدرة على تفسير المعارف الرياضية بعمق، بالإضافة إلى تمكينه من الفحص الناقد للأفكار الرياضية؛ للوصول إلى أقصى درجات الفهم الذي يقوده إلى القدرة على اتخاذ القرارات المناسبة لحل المواقف والمشكلات الرياضية المطروحة.
- ✓ تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين ينمي لديهم مهارات التفكير العليا؛ من خلال اتاحة الفرصة لديهم للقيام بعمليات التحليل، والتركيب، والتقويم، وتقديم

التفسيرات التي تبرر حلولهم للمشكلات الرياضية؛ مما ينمي لديهم أبعاد الفهم العميق في الرياضيات، ويتفق ذلك مع ما أكدت عليه دراسة كلاً من عبد الله (٢٠٢٢)، وإبراهيم، ومرسال (٢٠٢٢) التي أكدتا على أن تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين يزيد من قدرتهم على التفكير بشكل عام، وعلى التعامل مع المشكلات والمواقف المختلفه.

- ✓ **تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى المتعلمين ينمي لديهم القدرة على المعالجة العميقة للمعارف الرياضية التي من خلالها يقوم المتعلم بعمل الروابط بين الخبرات الجديدة والخبرات السابقة؛ مما يؤدي إلى الفهم العميق في الرياضيات، ويتفق هذا مع ما أشارت إليه دراسة Khudhair & Jasim (2021) إلى أن مستويات عمق المعرفة تنمى لدى المتعلمين القدرة على تفسير المعلومات بعمق، وعلى فهم الأفكار بشكل أكثر موضوعية، وتحليلها، ونقدها، ويتفق أيضًا مع ما أكدته دراسة Baer (2016, 16) على أن تنمية مستويات عمق المعرفة يساعد التلاميذ في البحث، والتخطيط، واستخلاص النتائج حول ما يتعلموه من بداية الدرس إلى نهايته**
- ✓ **ما أكدته دراسة Patterson et al. (2013, 41) على أن تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية لدى التلاميذ يهدف إلى مساعدتهم على فهم المشكلات الرياضية، والمثابرة على حلها، والقدرة على بناء الحجج وتقييم ونقد أفكار الآخرين؛ مما يسهم في اكسابهم أبعاد الفهم العميق.**

كل ما سبق كان سببًا في وجود علاقة ارتباطية موجبة قوية بين مستويات عمق المعرفة الرياضية وأبعاد الفهم العميق في الرياضيات.

توصيات البحث:

في إطار النتائج التي تم التوصل إليها يمكن تقديم التوصيات التالية التي قد تسهم في تطوير العملية التعليمية:

١- **عقد ورش تدريبية لتدريب معلمي الرياضيات أثناء الخدمة على استخدام وتطبيق نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تدريس الرياضيات؛ لرفع كفائتهم وقدراتهم المهنية، وعلى كيفية تنمية مستويات عمق المعرفة والفهم العميق لدى المتعلمين.**

٢- **تضمين كتب أدلة المعلم في الرياضيات، والكتب الدراسية بالأنشطة والأساليب الخاصة بالتلمذة المعرفية؛ ليستفيد منها المعلم أثناء التدريس.**

٣- **دعم استخدام نموذج التلمذة المعرفية ونموذج ويتلي في جميع المواد الدراسية الآخرى؛ لتحقيق أعلى قدر من كفاءة التعلم، وتحسين تعلم الطلاب.**

٤- **ضرورة استخدام استراتيجيات ونماذج التدريس التي تتمركز حول المتعلم وتحترم خلفيته المعرفيه السابقة في تدريس جميع المواد الدراسية بشكل عام وفي تدريس مادة الرياضيات بشكل خاص.**

٥- **تضمين محتوى مناهج كتب الرياضيات وخاصة المرحلة الإبتدائية لمشكلات وأنشطة رياضية تنمي مستويات عمق المعرفة والفهم العميق في الرياضيات لدى التلاميذ.**

٦- **تضمين مقررات الرياضيات مستويات عمق المعرفة الأربع مع تحقيق التكامل والتوازن بينهما.**

مقترحات البحث:

في ضوء النتائج، واستكمالاً لما بدأه البحث الحالي؛ يمكن اقتراح بعض العناوين للبحوث والدراسات المستقبلية، ومنها:

١- فاعلية استخدام نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي في تنمية أنواع آخرى من التفكير (التفكير الناقد، التفكير التحليلي، التفكير الاستدلالي، التفكير السابر، التفكير التقويمي) لدى مراحل دراسية مختلفة.

٢- فاعلية برنامج لتدريب المعلمين أثناء الخدمة على استخدام نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في التدريس وأثر ذلك على تنمية مهارات حل المشكلات الرياضية لدى المتعلمين.

٣- فاعلية استخدام نماذج بنائية مختلفة لتنمية مستويات عمق المعرفة والفهم العميق في الرياضيات لدى مراحل تعليمية مختلفة.

٤- فاعلية التدريس باستخدام نموذجي التلمذة المعرفية ووتلي للمتعلمين ذوي الاحتياجات الخاصة في مراحل دراسية مختلفة.

٥- فاعلية استخدام نماذج ما بعد البنائية لتنمية مستويات عمق المعرفة والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ المراحل التعليمية المختلفة.

٦- دراسة اتجاهات معلمي الرياضيات والمتعلمين نحو استخدام النماذج البنائية، ونماذج ما بعد البنائية في عملية التدريس.

٧- تحليل كتب الرياضيات للمراحل الدراسية المختلفة في ضوء مستويات العمق المعرفي.

٨- إجراء دراسات حول مدى تضمين كتب الرياضيات لأبعاد الفهم العميق في كافة المراحل الدراسية.

المراجع:

أولاً/ المراجع العربية:

إبراهيم، سحر ماهر خميس، ومرسال، إكرامي محمد. (٢٠٢٢). مستويات عمق المعرفة الرياضياتية في بيئات تعلم الرياضيات (دراسة تحليلية مقارنة) .(*مجلة تربويات الرياضيات*)، *٢٥(٤)*، ١٩٧–٢٦٨.

أحمد، إيمان سمير حمدي. (٢٠٢٠). فاعلية إستراتيجية توليفية قائمة على استراتيجيتي الأصابع الخمسة والرؤوس المرقمة لتنمية التحصيل والفهم العميق والاتجاه نحو العمل الجماعي في الرياضيات

باللغة الإنجليزية لدى تلاميذ الصف الثالث الإبتدائي. *مجلة البحث العلمي في التربية، ٢١*(٧)، ٣٨٦–٤٢٨.

ادم، مرفت محمد كمال، وعبد الحميد، رشا هاشم. (٢٠١٧). توظيف التعليم المتمايز من خلال الكتاب الإلكتروني في تدريس الهندسة لتنمية المستويات التحصيلية العليا ومهارات التواصل الرياضي والفهم العميق لدى طلاب الصف الثاني الإعدادي .*مجلة تربويات الرياضيات، ٢٠(٤)*، ١٢٩–١٧٦.

البلادى، حمدى بن هنيدى بن عاتق. (٢٠١٩). فاعلية استخدام استراتيجية مقترحة قائمة على التعلم البنائي في تدريس الرياضيات في تنمية التفكير الرياضي لدى تلاميذ الصف الأول المتوسط. *المجلة التربوية، جامعة سوهاج، (٦٢)*، ٥١–٨٢.

البلوي، عبدالله بن سليمان، الصمادي، محارب علي محمد. (٢٠١٧). فاعلية إستخدام إستراتيجية التلمذة المعرفية في تنمية مهارات التفكير الرياضي لدى طلاب السنة التحضيرية في جامعة تبوك. *مجلة كلية التربية، جامعة كفر الشيخ، ١٧(٤)*، ٣٥٦–٤٢٢.

بني ملحم، ليث أحمد، الشناق، مأمون محمد، وجورانة، طارق يوسف. (٢٠٢١). فاعلية نموذج (ويتلي) للتعلم المتمركز حول المشكلة في اكتساب المفاهيم الرياضية لدى طلبة الصف السادس. *مجلة جامعة القدس المفتوحة للأبحاث والدراسات التربوية والنفسية، ١٢(٣٥)*، ١٤٣–١٥٦.

تمساح، ابتسام على أحمد إبراهيم. (٢٠٢٠ أ). نموذج تدريسي قائم على نظرية التلمذة المعرفية في تدريس العلوم لتنمية بعض المفاهيم البيولوجية ومهارات الذات التنظيمية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. *المجلة المصرية للتربية العملية، ٢٣ (١)*، ٨٩–١٣١.

تمساح، ابتسام على أحمد إبراهيم. (٢٠٢٠ ب). فاعلية تنظيم محتوى وحدة في العلوم وفق نموذج " VARK" في تنمية مستويات عمق المعرفة " DOK" والتصور الخيالي لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية ذوي أنماط التعلم المختلفة. *المجلة التربوية، ٧٤*، ١٢٢١–١٢٧٦.

الجبر، بسمة عبد اللطيف حمد. (٢٠١٣). أثر استخدام استراتيجية التلمذة المعرفية الإلكترونية على تنمية حل المشكلات الرياضية والدافعية للتعلم لدى طالبات السنة التحضرية بالمملكة العربية السعودية (رسالة ماجستير). كلية الدرسات العليا، جامعة الخليج العربي، البحرين.

الجلبي، فائزة عبد القادر. (٢٠١٩). مهارات التفكير التوليدي لدى الطلبة المطبقين في قسم الرياضيات/ كلية التربية الأساسية. *مجلة كلية التربية الأساسية، ٢٥(١٠٥)*، ٨٠–٩٧.

الجندي، حسن عوض حسن. (٢٠٢٠). استخدام نموذج التلمذة المعرفية لتنمية مهارات حل المسألة الرياضية اللفظية والنزعة الرياضياتية المنتجة لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية. *مجلة تربويات الرياضيات، ٢٣(٧)*، ٨٢–١٥٨.

حافظ، محمد رمضان هارون، محمد، طه إبراهيم طه، وعبدالرحمن، مديحة حسن محمد. (٢٠٢٠). أثر استخدام نموذج ويتلي في تنمية بعض مهارات الحس العددي لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي . *مجلة كلية التربية، جامعة بني سويف، ١٧(٩٨)*، ٤١٤–٤٥٧.

الحربى، فيصل بن غنيم بن مناور. (٢٠١٧). اثر استخدام نموذج ويتلى فى تنمية التحصيل الدراسى بمقرر الرياضيات فى المرحلة المتوسطة. *عالم التربية، ١٨(٥٧)، ١–٥٩.*

حسن، إبراهيم محمد عبدالله، والريس، إيمان محمد إبراهيم. (٢٠١٨). استراتيجية قائمة على نموذج "ويتلى" لتنمية مهارات تحليل محتوى الرياضيات المدرسية والاتجاه نحو تعليم الرياضيات للطلاب المعلمين. *مجلة تربويات الرياضيات، ٢١(١٠)*، ٣٠–٦٩.

حسن، سعودي صالح عبدالعليم، و الدسوقي، وفاء صلاح الدين إبراهيم. (٢٠٢٢). فاعلية موقع ويب قائم

على نموذج عمق المعرفة في تنمية مستويات العمق المعرفي المرتبط بمهارات استخدام تطبيقات

الحوسبة السحابية لدى طلاب تكنولوجيا التعليم.تكنولوجيا التعليم. *الجمعية المصرية لتكنولوجيا التعليم*، ٣٢ (٢)، ٣–٤٧.

حسن، شيماء محمد على. (٢٠٢١). برنامج مقترح قائم على التفاعل بين إطار "TPACK" " ونموذج ويتلي في تنمية التفكير التحليلي وجدارات التدريس لدى معلمي الرياضيات لذوي الاحتياجات الخاصة. مجلة علوم ذوي الاحتياجات الخاصة، ٣(٥)، ١٤٨٦–١٥٨٨.

حسن، شيماء محمد علي. (٢٠١٨). استراتيجية مقترحة في ضوء نظرية فيجوتسكى لتنمية عمق المعرفة الرياضية ومسؤولية تعلم الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. *مجلة تربويات الرياضيات*، ٢١ (١٠)، ١٢٦-١٧٧.

حماده، محمود محمد. (٢٠١٨). أثر استخدام نموذج ويتلي في اكتساب المفاهيم الهندسية والدافعية نحو تعلم الهندسة لدى طلبة الصف العاشر الأساسي (رسالة ماجستير). كلية العلوم التربوية، جامعة آل البيت.

الحنان، أسامة محمود محمد. (٢٠٢٠). الدمج بين استراتيجيتي حدائق الأفكار وشكل البيت الدائري في تنمية الفهم العميق للرياضيات والتمثيل الرياضي لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. *مجلة تربويات الرياضيات، ٢٣(٥)، ٢٣٤-٢٩٢.*

الحنان، أسامة محمود محمد. (٢٠٢١). برنامج قائم على التلمذة المعرفية في تدريس الرياضيات لتنمية التنور الرياضي وخفض التجول العقلي لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية. *مجلة تربويات الرياضيات، ٢٤ (٢)*، ١٥٢-٢٠٦.

الحنفي، أمل محمد مختار. (٢٠٢٢). فاعلية بيئة تعلم تكيفية في تنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية ومهارات التعلم الذاتي لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية .*مجلة تربويات الرياضيات*، ٢٥*(٤)*، ٣٢-١٠٨.

خير الله، حامد شياع، دريع، عاطف عبد علي. (٢٠١٩). أثر استخدام استراتيجية التلمذة المعرفية في التفكير الإستدلالي لدى طلاب الصف الثاني المتوسط في مادة الرياضيات. *مجلة كلية التربية، جامعة واسط.، (٣٥)، ٤٦٣-٤٩٨.*

الربيع، حنان بنت ونيس بن عمير. (٢٠٢١). دور معلمات اللغة العربية في تنمية الإستطلاع المعرفي باستخدام إستراتيجية التلمذة المعرفية لدى طالبات المرحلة الثانوية في منطقة الجوف. *مجلة العلوم التربوية والنفسية، ٥(٢)*، يناير، ٢٤-٤٧.

الرفاعي، وليد يسري عبد الحي. (٢٠١٩). بيئة تعلم إلكترونية تكيفية قائمة على نموذج التلمذة المعرفية لطلاب تقنيات التعليم ذوي التبسيط والتعقيد المعرفي وأثرها على تنمية مهارات إنتاج المحتوى الرقمي وعمق المعرفة. *مجلة التربية (الأزهر)*، ٣٨ (١٨٤)، ٧٦٥-٨٥٧.

زنقور، ماهر محمد صالح. (٢٠١٨). التفاعل بين تجزيل المعرفة الرياضياتية والنمط المعرفي [لفظي/تخيلي] والسعة العقلية لتنمية الفهم العميق في الرياضيات لدي طلاب الصف الأول الثانوي. *مجلة تربويات الرياضيات،٢١(١)*، ٨١-١٦٩.

الزهراني، محمد سعيذ، أبو رحمة، إياد حسين. (٢٠١٩). فاعلية استخدام برنامج تعليمي قائم على التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم النحوية والقدرة على حل المشكلات لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية بالطائف، *المجلة التربوية لكلية التربية بسوهاج*، ٦٨، ديسمبر، ٤٩١-٥٥٦.

سعد، هبه محمد إبراهيم. (٢٠٢٢). فاعلية برنامج تدريبي قائم على نموذج التلمذة المعرفية في تنمية مهارات التفكير العليا لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية. *المجلة المصرية للدراسات النفسية، ٣٢(١١٥)*، إبريل، ٤٢١-٤٦٨.

سيد، هويدا محمود سيد. (٢٠٢٢). استخدام الجيوجبرا في تنمية الكفاح المنتج والفهم العميق في وحدة الهندسة والقياس لطلاب الصف الأول الإعدادي بمحافظة أسيوط. *مجلة تربويات الرياضيات*، ٢٥ (٣)، إبريل، ١٧٩-٢٣٩.

سيفين، عماد شوقي ملقي. (٢٠١٥). استخدام إستراتيجية " ويتلي" للتعلم المتمركز حول المشكلة لتنمية التفكير التأملي والقدرة على حل المعادلات والمتباينات الجبرية والاتجاه نحوها لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. *مجلة تربويات الرياضيات، ١٨(١)*، الجزء الأول، ٨٤-١٣٠.

الشوحة، محمد حسام نواف. (٢٠٢٠). أثر استخدام نموذج ويتلي في التحصيل الدراسي في الرياضيات والاتجاه نحوها لدى طلاب الصف الخامس الأساسي في محافظة إربد (رسالة ماجستير). جامعة آل البيت، المفرق.

طعيمة، رشدي أحمد. (٢٠٠٤). *تحليل المحتوى في العلوم الإنسانية*. القاهرة، دار الفكر العربي.

عبد البر، عبد الناصر محمد عبد الناصر. (٢٠١٩). نموذج تدريسي مقترح قائم على نظرية التعلم المستند للدماغ لتنمية الفهم العميق للرياضيات ومهارات ما وراء المعرفة لدى تلاميذ الصف الثالث الإعدادي. *مجلة كلية التربية، جامعة المنوفية، (١)*، ١٠١-١٥١.

عبد الرحيم، محمد حسن عبدالشافي. (٢٠٢٠). استخدام التعلم التوليدي لتنمية عمق المعرفة الرياضياتية والثقة بالقدرة على تعلم الرياضيات لدى طلاب المرحلة الإعدادية. *مجلة تربويات الرياضيات*، ٢٣ (٣)، ١٣٠-١٧٦.

عبد الله، علي محمد غريب. (٢٠٢٢). استخدام تطبيقات جوجل التفاعلية في تدريس الرياضيات لتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية والتنور التكنولوجي لدى طلاب الصف الأول الثانوي. *مجلة تربويات الرياضيات*، ٢٥ (١)، يناير، الجزء الأول، ٢٠٩-٢٧٥.

عبد الملاك، مريم موسى متى. (٢٠٢٠). استخدام استراتيجية الرياضيات الواقعية لتنمية مستويات عمق المعرفة الرياضية وتحسين الرغبة في تعلم الرياضيات لدى طلاب المرحلة الإعدادية. *مجلة جامعة الفيوم للعلوم التربوية والنفسية*، ٣ (١٤)، ٤٤٥-٥٠١.

عبد المنعم، هاني محمود شوقي، منصور، فايز محمد، وخطاب، أحمد علي إبراهيم. (٢٠٢١). فاعلية نموذج مكارثي (Mc Carthy) في تدريس الرياضيات لتنمية مهارات التفكير التوليدي لدى طلاب الصف الثاني الثانوي العام .*مجلة جامعة الفيوم للعلوم التربوية والنفسية، ١٥(١٦)*، ٢١١١-٢٠٥٠.

العتيبي، ريم بنت طلال بن شاعي، والفهد، عبدالله بن سليمان. (٢٠٢٠). برنامج تدريسي قائم على التلمذة المعرفية وفاعليته في تنمية مهارات التفكير الجانبي والتواصل الرياضي لدى طالبات الصف الأول الثانوي بمدينة الرياض (رسالة دكتوراه). جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية، الرياض.

عثمان، عيد عبد الغني، سلام، باسم صبري محمد، عبد الرحمن، محمد أحمد، علي، محمد العزب حسن. (٢٠١٧). النظرية البنائية الاجتماعية: نماذجها واستراتيجيات تطبيقها .*مجلة العلوم التربوية– كلية التربية بقنا ، ٣١(٣١)*، ١٦٧-١٨٩.

عودة، نعيم منخي. (٢٠١٨). أثر استخدام أنموذج ويتلي في تحصيل تلاميذ المرحلة الإبتدائية في مادة الرياضيات.*مجلة الأطروحة للعلوم الإنسانية، ٣(١٢)*، ١١-٣٦.

العييد، أفنان بنت عبدالرحمن. (٢٠٢١). أثر توظيف أنموذج التلمذة المعرفية في بيئات التعلم الإلكتروني في تحسين كفاءة التعلم وخفض التجول العقلي لدى طالبات جامعة الأميرة نورة بنت عبد الرحمن. *مجلة العلوم التربوية والنفسية، ٢٢(٢)*، ٣٠٥-٣٣٨.

الفايز، العنود محمد عيد. (٢٠١٧). مستويات عمق المعرفة الرياضي في كتب الرياضيات للصفوف الأساسية العليا في الأردن (رسالة ماجستير). كلية الدرسات العليا، الجامعة الأردنية.

قرشم، أحمد عفت مصطفى، طلبة، محمد علام محمد، و فودة، محمد حمدي محمد علي. (٢٠٢٢). فاعلية استراتيجية التعلم القائم علي المشروع في تنمية مهارات التفكير التوليدي في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية.*مجلة كلية التربية، جامعة العريش، ١٠(٣٢)*، ٤٢٨ – ٤٧٤.

محمد إبراهيم، أسماء، عطيفي، زينب محمود، وسيد، هويدا محمود. (٢٠٢٣). استخدام نموذج التفكير السابر لعلاج المغالطات الهندسية وتنمية مهارات الفهم العميق لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي .*المجلة التربوية لتعليم الكبار، ٥*(١)، ١١٦- ١٥٨.

محمد، إيهاب السيد شحاته. (٢٠١٩). وحدة مقترحة في الرياضيات قائمة على المنطق الفازي " Fuzzy Logic" لتنمية مستويات عمق المعرفة ومهارات اتخاذ القرار لدى طلاب المرحلة الجامعية. *مجلة تربويات الرياضيات، ٢٢* (١١)، ٦-٤٨.

محمد، خلف الله حلمي فاوي، مصطفي، عبد الفتاح جاد، والهاجري، سالم بن حمد بن ناصر. (٢٠٢١). فاعلية التعلم الخبراتي في تدريس الرياضيات لتنمية عمق المعرفة الرياضية وتحسين اليقظة العقلية لدى تلاميذ المرحلة الإبتدائية. *مجلة تربويات الرياضيات*، ٢٤(٤)، الجزء الأول، ١٩٦-٢٢٧.

محمد، فايز محمد منصور. (٢٠١٩). أثر استخدام استراتيجية التلمذة المعرفية في تدريس الرياضيات لتنمية مهارات التفكير الجانبي وخفض قلق الرياضيات لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي. *مجلة دراسات تربوية واجتماعية*، ٢٥*(سبتمبر)*، ٥٧٧-٧٧١.

محمد، فايز محمد منصور. (٢٠٢١). استراتيجية مقترحة قائمة على العصف الذهني وحل المشكلات لتنمية عادات العقل ومهارات التفكير الناقد في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية. *مجلة تربويات الرياضيات، ٢٤(٢)*، ٨٠-١٥١.

المسرحي، ياسمين بنت أحمد يحيى، والسعيدي، حنان أحمد يحيى. (٢٠٢١). استراتيجية مقترحة قائمة على برنامج كاهوت التعليمي لتدريس الرياضيات وأثرها على تنمية مهارات حل المشكلات والتواصل الرياضي لدى طالبات الصف الأول المتوسط .مجلة تربويات الرياضيات، ٢٤(١١)، ٢٨٧-٣٢٠.

المشهداني، عباس ناجي عبد الأمير، الشمري، إخلاص صباح عبد الأمير.(٢٠١٧). أثر استخدام استراتيجية التلمذة المعرفية في تحصيل مادة الرياضيات لدى طالبات الصف الأول المتوسط وتفكيرهن الجانبي. *مجلة الفنون والأدب وعلوم الإنسانيات والاجتماع، (١٤)*، مايو، ٧٠-٩٦.

مطر، إيمان شفيق. (٢٠١٩). أثر توظيف نموذج (ويتلي) wetly المعدل على تنمية مهارات التفكير الإبداعي والاتجاه نحو الرياضيات في وحدة الكسور لدى طالبات الصف الرابع الأساسي في محافظة غزة (رسالة ماجستير). كلية التربية، جامعة الأزهر، غزة.

Levin, D. M., De La Paz, S., Lee, Y., & Escola, E. N. (2021). Use of cognitive apprenticeship models of instruction to support middle school students' construction and critique of written scientific explanations and arguments. *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal*, *26*(1), 58-72.

Adnan, Y. A. (2021). The Influence of Student Worksheet Based on Problem Centered Learning to Increase Students Mathematics Creative Thinking Ability. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, *611*, 226-230.

Ali, S. S. (2019). Problem based learning: A student-centered approach. *English language teaching*, *12*(5), 73-78.

Allen, D. E., Donham, R. S., & Bernhardt, S. A. (2011). Problem- based learning. *New directions for teaching and learning*, (*128)*, 21-29.

Al-Saadi,M.R, & Al-Kinani,H.K. (2021). Depth of mathematical knowledge and its relationship to information processing among secondary school students. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education .12* (13), 5133-5140.

Apriliana, L. P., Handayani, I., & Awalludin, S. A. (2019). The Effect of a Problem Centered Learning on Student's Mathematical Critical Thinking. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, *4*(2), 124-133.

Baer, E. R. (2016). *Leading for educational equity in a context of accountability: Instructional technology methods and depth of knowledge* (Doctoral dissertation), Southern Illinois University at Edwardsville.

Branscome, E. E., & Robinson, E. C. D. (2017). Lost in translation: Bloom's taxonomy and Webb's depth of knowledge applied to music standards. *Visions of Research in Music Education*, *30*(1), 1-19.

Butler, B. A., Butler, C. M., & Peabody, T. D. (2019). Cognitive apprenticeship in orthopaedic surgery: updating a classic educational model. *Journal of Surgical Education, 76*(4), 931-935.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of mathematical behavior*, *21*(4), 401-421.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for research in mathematics education*, *22*(1), 3-29.

Collins, A. (1991). Cognitive apprenticeship and instructional technology. *Educational values and cognitive instruction: Implications for reform*, 121-138.

Collins, A., Brown, J. S., & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American educator*, *15*(3), 6-11

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (2006). *Cognitive apprenticeship* (Vol. 291). na.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (2018). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In *Knowing, learning, and instruction*, 453-494.

Czarnocha, B., & Baker, W. (2018). Assessment of the depth of knowledge acquired during the aha! Moment insight. *Journal of Mathematics Education*, *11*(3), 90-104.

Dennen, V. P., & Burner, K. J. (2008). The cognitive apprenticeship model in educational practice. In Handbook of research on educational *communications and technology*, Routledge, 425-439.

Doucette, D., Clark, R., & Singh, C. (2020). Professional development combining cognitive apprenticeship and expectancy-value theories improves lab teaching assistants' instructional views and practices. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(2), 020102.

Eze, T. I., Obidile, J. I., & Okotubu, O. J. (2020). Effect of cognitive apprenticeship instructional method on academic achievement and retention of auto mechanics technology students in technical colleges. *European Journal of Education Studies*, 6(11), 180-190.

Gusnur, M. (2021). Penerapan model pembelajaran creative problem solving dan problem centered learning terhadap kemampuan berpikir tingkat tinggi ditinjau dari ketekunan belajar siswa (doctoral dissertation), fakultas tarbiyah dan keguruan, universitas islam negeri.

Hasan, A. J., Hussein, G. L., Abdullah, M. H., & Al-Jadaan, D. A. N. (2022). The impact of the cognitive apprenticeship strategy in learning some technical gems'skills for students. *ResearchJet Journal of Analysis and Inventions*, *3*(04), 145-159.

Hess, K. (2013). A guide for using Webb's depth of knowledge with common core state standards. *The Common Core Institute, Center for College and Career Readiness*.

Hess, K., Jones, B., Carlock, D., & Walkup, J. R. (2009). Cognitive rigor: Blending the strengths of Bloom's taxonomy and Webb's depth of knowledge to enhance classroom-level processes. *ERIC Document (Online Database)*.

Imamah, D. N. (2014). Penerapan model pembelajaran problem centered learning (pcl) untuk meningkatkan hasil belajar siswa sub pokok bahasan operasi hitung bentuk aljabar kelas vii, program studi pendidikan matematika fakultas keguruan dan ilmu pendiidikan, universitas jember.

Johnson-Laghi, K. A., & Mattar, M. C. (2022). Integrating Cognitive Apprenticeship Into Gastroenterology Clinical. *Training. Gastroenterology*, *163*(2), 364-367.

Khudhair, L. K., & Jasim, A. B. M. (2021). Analyzing the content of the mathematics textbook of the fifth grade preparatory according to the depth of knowledge levels. *Journal of Contemporary Issues in Business and Government*, *27*(1).

Kim, E., Orange, S., & Eunyoung, N. (2015). Common Core and Creativity: A Webb's Depth of Knowledge Analysis. Paper presented at the annual

conference of the National Council of Professors of Educational, Washington.

Kirschner, P. A., & Hendrick, C. (2020). " Cognitive Apprenticeship" Revisited. *American Educator*, *44*(3), 37-50.

Lee, Y., & Paz, S. D. L. (2021). Writing scientific explanations: Effects of a cognitive apprenticeship for students with LD and English learners. *Exceptional Children*, *87*(4), 458-475.

Lo, S. C., & Tsai, H. H. (2022). Perceived Effectiveness of Developing a Mobile System of Formative Test with Handwriting Revision to Devise an Instruction Design Based on Cognitive Apprenticeship Theory. *Sustainability*, *14*(4), 2272.

Mannion, C., & Brown, N. (2022). Learning to Teach, Teaching to Learn: A Cognitive Apprenticeship Model to Train Instruction Librarians. Eastern Michigan University, *LOEX Conference Proceedings*, 1-5.

Marconi, E., Smith, C., & Lombardi, D. (2009). Depth of knowledge: An effective tool for educating students. ShopTalk (The Southern Nevada Regional Professional Development Program), *4*(2), 3-16.

Matsuo, M., & Tsukube, T. (2020). A review on cognitive apprenticeship in educational research: Application for management education: *Article 100417. The international journal of management education*, *18*(3), 1-9.

Minshew, L. M., Olsen, A. A., & McLaughlin, J. E. (2021). Cognitive apprenticeship in STEM graduate education: A qualitative review of the literature. *AERA Open*, *7(1)*, 1-16.

Molina, C. (2014). Teaching Mathematics Conceptually. *SEDL Insights*, *1*(4), 1-8.

Murphy, D. (2016). A literature review: The effect of implementing technology in a high school mathematics classroom. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, *2*(2), 295-299.

Napari, A. (2020). Using cognitive apprenticeship to enhance the study of budgeting and budgetary control: An action research. *The Universal Academic Research Journal*, *2*(1), 1-14.

Patterson, L. G., Musselman, M., & Rowlett, J. (2013). Using the depth of knowledge model to create high school mathematics assessments--research. *Kentucky Journal of Excellence in College Teaching and Learning*, *11*(2), 4.

Pepin, B., Xu, B., Trouche, L., & Wang, C. (2017). Developing a deeper understanding of mathematics teaching expertise: an examination of three Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational studies in Mathematics*, *94*, 257-274.

Pinto, S. I., & Zvacek, S. M. (2022). Cognitive apprenticeship and T-shaped instructional design in computational fluid mechanics: Student perspectives on learning. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, *50*(1), 51-77.

Pristel, V., Dawson, V., & Howitt, C. (2022, July). Fostering critical thinking in a Year 7 integrated STEM project with the Cognitive Apprenticeship Model. Deakin University STEM Education Conference, *In Conference proceedings: Selected Works* (p. 35).

Rinaldi, E., & Afriansyah, E. A. (2019). Perbandingan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa antara Problem Centered Learning dan Problem Based Learning. *NUMERICAL: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika,3(1),* 9-18.

Rucker, H., Kolpek, J. H., & Cain, J. (2021). Implementing cognitive apprenticeship theory into the design of a doctor of pharmacy course. *Currents in Pharmacy Teaching and Learning*, *13*(7), 835-842.

Serianni, B., & Brooksher, K. (2016). Rigor Demystified, Now What?: Applying & Aligning Webb's Depth of Knowledge to Literacy & Math Instruction. National Youth-At-Risk Conference Savannah, Armstrong State University.

Shobirin, M. S., & Hanafi, A. N. (2021, December). Improving Learning Activities And Outcomes With the Implementation of Problem Based Learning Learning Model. In *Multidiscipline International Conference* , 1(1), 101-104.

Stefaniak, J. E. (2018). Employing a cognitive apprenticeship to improve faculty teaching. *The Journal of Faculty Development*, *32*(2), 45-52.

Taylor, K. (2021). *Online Professional Development and Teacher Capacity to Incorporate English Language Arts Assignments Based on Levels 3 and 4 of Webb's Depth of Knowledge Framework* (PhD dissertation), School of Graduate and Professional Studies, Trevecca Nazarene University.

Terpstra, N., & King, S. (2021). The missing link: Cognitive apprenticeship as a mentorship framework for simulation facilitator development. *Clinical Simulation in Nursing*, *59*, 111-118.

Vahey, P., Knudsen, J., Rafanan, K., & Lara-Meloy, T. (2013). Curricular activity systems supporting the use of dynamic representations to foster students' deep understanding of mathematics. *Emerging technologies for the classroom: A learning sciences perspective*, 15-30.

Weay, A. L., Masood, M., & Abdullah, S. H. (2016). Systematic review of revised Bloom Taxonomy, SOLO Taxonomy and Webb's Depth of Knowledge (DOK) in assessing students' historical understanding in learning history. *Malaysian Journal of Higher Order Thinking Skills in Education*, 1-27.

Webb, N. (2002). Depth-of-Knowledge (DOK) Levels for Mathematics. Wisconsin Center for Educational Research, https://static.pdesas.org .

Wedelin, D., & Adawi, T. (2014). Teaching mathematical modelling and problem solving-A cognitive apprenticeship approach to mathematics and engineering education *CISPEE*, 4(5), 49-55.

Yew, E., & Goh, K. (2016). Problem-based learning: An overview of its process and impact on learning. *Health professions education*, *2*(2), 75-79.

Yulianti, Y., Pasaribu, E. Z., & Ritonga, M. W. (2022). The Effect of Problem Centered Learning Model Assisted by Audio-Visual Media on Students' Mathematical Communication Ability. *MathNesia: Journal of Math Education*, *1*(1), 1-9.